# 1. Transformación Directa

La proyección ortográfica es una proyección desde el infinito. El punto de proyección estará en la dirección del vector que une el centro del elipsoide con el punto $\lambda_0, \phi_0$. Para realizar esta proyección simplemente hallaremos las coordenadas del punto $\lambda, \phi$ en un sistema de coordenadas cartesiano con uno de sus ejes alineado con el vector mencionado. Las coordenadas en los otros dos ejes serán las coordenadas en proyección.

En punto $\lambda, \varphi$ no será visible en la proyección si:

$$sin\varphi_0 \sin\varphi + cos\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_0) < 0$$

En primer lugar calculamos las coordenadas cartesianas geocéntricas $X, Y, Z$ correspondientes a $\lambda, \varphi$.

$$\begin{aligned} X &= N\cos\varphi\cos\lambda \\ Y &= N\cos\varphi\sin\lambda \\ Z &= N(1-e^2)\sin\varphi \end{aligned}$$

Aplicamos las rotaciones $R_z(\lambda_0)$, $R_y(\varphi_0)$ para orientar el eje $X$ con el centro de proyección $\lambda, \varphi$:

$$\begin{aligned} R_z(\lambda_0) &= \begin{pmatrix} \cos\lambda_0 & \sin\lambda_0 & 0 \\ -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ R_y(\varphi_0) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & 0 & \sin\varphi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_0 & 0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} &= R_y(\varphi_0)R_z(\lambda_0)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las coordenadas en proyección son

$$x = Y'' \; y = Z''$$

En el caso de la esfera la detección de puntos no visibles se puede hacer al calcular $X''$; el punto será visible sólo si $X'' \geq 0$.

En una proyección cartográfica convencional, todos los puntos con la misma longitud y latitud (sobre la misma vertical) comparten el mismo punto $x, y$ en proyección.

Esta proyección puede ser adaptada para proporcionar transformación tridimensional reversible que represente en perspectiva puntos que no se encuentran en la superficie de la tierra (e.g. órbitas de satélites). Para ello mantendremos una tercera coordenada en proyección $z = X''$. Antes deberemos haber usado la elevación sobre el elipsode $h$ además de $\lambda, \varphi$ para calcular $X, Y, Z$ así:

$$\begin{aligned} X &= (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ Y &= (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ Z &= \left[N(1-e^2)+h\right]\sin\varphi \end{aligned}$$

En resumen:

$$\begin{aligned} x &= -\sin\lambda_0 N\cos\varphi\cos\lambda + \cos\lambda_0 N\cos\varphi\sin\lambda \\ y &= -\cos\lambda_0\sin\varphi_0 N\cos\varphi\cos\lambda - \sin\lambda_0\sin\varphi_0 N\cos\varphi\sin\lambda + \cos\varphi_0 N(1-e^2)\sin\varphi \end{aligned}$$

Pero es más eficiente multiplicar por separado por cada matriz de rotación ya que así se efectúan menos multiplicaciones:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} &= R_z(\lambda_0)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} &= R_y(\varphi_0)\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2. Transformación Inversa

Tenemos $Y'' = x$ y $Z'' = y$.

Si estamos usando una proyección tridimensional (manteniendo $z$) tenemos $X'' = z$. Si este no es el caso debemos calcular $X''$. En el caso de la esfera es fácil; si $a^2 - x^2 - y^2 < 0$ el punto no corresponde a la superficie terrestre ($R = a$). En otro caso:

$$X'' = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

En el caso no esférico tenemos que la ecuación del elipsoide en la referencia estándar $(X, Y, Z)$ es la cuádrica:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

Que se puede escribir de forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 1$$

Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos un sistema de referencia $X'', Y'', Z''$ cuya relación con el sistema de referencia estándar es:

$$\begin{pmatrix} X'' & Y'' & Z'' \end{pmatrix} = R_y(\varphi) R_z(\lambda) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

(Nótese que el orden de la multiplicación matricial es el inverso del orden de aplicación de las rotaciones de una en una).

La matriz del cambio de referencia es $R = R_y(\varphi) R_z(\lambda)$ y tenemos que la matriz inversa de $R$ coincide con la matriz transpuesta de $R$:

$$R^{-1} = R^T$$

Ahora podemos expresar la ecuación del elipsoide en el sistema $X'', Y'', Z''$ teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'' & Y'' & Z'' \end{pmatrix} R^{T^T} = \begin{pmatrix} X'' & Y'' & Z'' \end{pmatrix} R$$

Y así, la ecuación del elipsoide en el sistema $X'', Y'', Z''$ es:

$$\begin{pmatrix} X'' & Y'' & Z'' \end{pmatrix} RMR^T \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = 1$$

La matriz $M$ es simétrica y $R, R^T$ son ortogonales; $RMR^T$ es simétrica.

Esta es una ecuación cuadrática en $X''$ que puede resolverse usando los valores de $Y''$ y $Z''$ para dar o bien ningún resultado —$Y'', Z''$ está fuera del elipsoide— o bien dos resultados: la cara frontal ($X''$>0) y la cara posterior del elipsoide ($X''$>0) visto desde el punto de observación que es el extremo del infinito del eje $X''$ positivo. También es posible el caso límite de la doble solución $X'' = 0$, cuando el punto está en el borde del elipsoide visto desde el punto de observación.

Si tenemos

$$RMR^T = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

La ecuación es

$$AX''^2 + 2DX''Y'' + BY''^2 + 2EX''Z'' + 2FY''Z'' + CZ^2 = 1$$

Que es una ecuación cuadrática $\bar{a}X''^2 + \bar{b}X'' + \bar{c} = 0$ en $X''$ con

$$\begin{aligned} \bar{a} &= A \\ \bar{b} &= 2(DY'' + EZ'') \\ \bar{c} &= BY''^2 + 2FY''Z'' + CZ''^2 - 1 \end{aligned}$$

En nuestro caso $D = F = 0$.

Finalmente si $\bar{b}^2 - 4\bar{a}\bar{c} >= 0$ existirá solución; el valor para la cara visible del elipsoide será:

$$X'' = \frac{-\bar{b} + \sqrt{\bar{b}^2 - 4\bar{a}\bar{c}}}{2\bar{a}}$$

Ahora podemos proceder a invertir el proceso de proyección. En primer lugar aplicaremos las rotaciones $R_y(\varphi_0)^{-1} = R_y(\varphi_0)^T = R_y(-\varphi_0)$ y $R_z(\lambda_0)^{-1} = R_z(\lambda_0)^T = R_z(-\lambda_0)$ $([R_y(\varphi_0)R_z(\lambda_0)]^{-1} = R_z(-\lambda_0)R_y(-\varphi_0)$

$$\begin{aligned} R_y(-\varphi_0) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & 0 & -\sin\varphi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_0 & 0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \\ R_z(-\lambda_0) &= \begin{pmatrix} \cos\lambda_0 & -\sin\lambda_0 & 0 \\ \sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= R_z(-\lambda_0)R_y(-\varphi_0)\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por ultimo queda calcular las coordenadas geodésicas a partir de las coordenadas cartesianas en el sistema estándar:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$u = \arctan\left[\frac{Z(1 - f + e^2\frac{a}{r})}{\sqrt{X^2 + y^2}}\right]$$

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$

$$\varphi = \arctan\frac{Z(1-f) + e^2 a\sin^3 u}{(1-f)(\sqrt{X^2+Y^2} - e^2 a\cos^3 u)}$$

Si se trataba de una proyección tridimensional calcularemos la elevación sobre el elipsoide:

$$h = \sqrt{X^2 + Y^2}\cos\varphi + Z\sin\varphi - a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$$