

Proyección Transversa Mercator

- **Coordenadas geodésicas:** longitud λ , latitud φ
- **Coordenadas rectangulares:** x, y
- **Parámetros del elipsoide geodésico** (elipsoide de revolución); dos de ellos bastan para definirlo:

Semieje mayor a , Aplanamiento α	
Semieje menor b	$b = a(1 - \alpha)$
Excentricidad e	$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
2ª Excentricidad e'	$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1 - e^2}$
c	$c^2 = \frac{a^2}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b}$

- **Parámetros de la proyección**
 - Origen de la transformación (longitud, latitud) λ_0, φ_0
 - Coordenadas del origen
 - Factor de corrección de escala
- **Arco de elipse meridiana, β , en función de la latitud, φ :**

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2) \int_0^\varphi \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

- **Otros parámetros usados en las transformaciones**

Radio de curvatura del 1 ^{er} vertical	$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$
Parámetro η	$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$
Meridiano central	$\lambda_{MC} = \lambda_0$
Diferencia de longitud con el meridiano central	$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{MC}$
Arco de meridiano correspondiente a φ	$\beta = \beta(\varphi)$
Arco de meridiano correspondiente a φ_0	$\beta_0 = \beta(\varphi_0)$
Arco relativo	$\beta' = \beta - \beta_0$

- **Transformación directa**

$$x = x_0 + k_0 \left(\Delta\lambda N \cos \varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - \tan^2 \varphi + \eta^2) + \frac{\Delta\lambda^5}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi + 14\eta^2 - 58 \tan^2 \varphi \eta^2) \right)$$

$$y = y_0 + k_0 \left(\beta' + N \tan \varphi \left(\frac{\Delta\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\Delta\lambda^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - \tan^2 \varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{\Delta\lambda^6}{720} \cos^6 \varphi (61 - 58 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi + 270\eta^2 - 330 \tan^2 \varphi \eta^2) \right) \right)$$

- La convergencia de meridianos, γ , y el módulo de deformación lineal, K , son respectivamente:

$$\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{\Delta\lambda^5}{15} \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - \tan^2 \varphi)$$

$$K = k_0 \left(1 + \frac{\Delta\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) \right)$$

- **Transformación inversa:** dadas las coordenadas en proyección x, y

- Eliminamos la corrección de escala y el desplazamiento del origen:

$$\Delta x = \frac{x - x_0}{k_0} \quad \Delta y = \frac{y - y_0}{k_0}$$

- Cálculo de la latitud aproximada φ_a :
 - Resolvemos la ecuación $\beta' = \Delta y$ para φ , obteniendo φ_a . i.e. φ_a es tal que $\beta(\varphi_a) = \Delta y + \beta_0$.
- Cálculo de la gran normal y el parámetro η aproximados:

$$N_a = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_a}} \quad \eta_a^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_a$$

- Cálculo de las coordenadas geodésicas:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_a & - \frac{\Delta x^2 \tan \varphi_a}{2N_a^2} (1 + \eta_a^2) \\ & + \frac{\Delta x^4 \tan \varphi_a}{24N_a^4} (5 + 3 \tan^2 \varphi_a + 6\eta_a^2 - 6 \tan^2 \varphi_a \eta_a^2 - 3\eta_a^4 - 9 \tan^2 \varphi_a \eta_a^4) \\ & - \frac{\Delta x^6 \tan \varphi_a}{720N_a^6} (61 - 90 \tan^2 \varphi_a + 45 \tan^4 \varphi_a + 107\eta_a^2 - 162 \tan^2 \varphi_a \eta_a^2 \\ & \quad - 45 \tan^4 \varphi_a \eta_a^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = \frac{\Delta x}{N_a \cos \varphi_a} & - \frac{\Delta x^3 (1 + 2 \tan^2 \varphi_a + \eta_a^2)}{6N_a^3 \cos \varphi_a} \\ & + \frac{\Delta x^5 (5 + 28 \tan^2 \varphi_a + 24 \tan^4 \varphi_a + 6\eta_a^2 + 8 \tan^2 \varphi_a \eta_a^2)}{120N_a^5 \cos \varphi_a} \end{aligned}$$

$$\lambda = \Delta\lambda + \lambda_{MC}$$

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\Delta x}{N_a k_0} \tan \varphi_a & + \frac{\Delta x^3}{3N_a^3 k_0^3} \tan \varphi_a (1 + \tan^2 \varphi - \eta_a^2 - 2\eta_a^4) \\ & + \frac{\Delta x^5}{15N_a^5 k_0^5} \tan \varphi_a (2 + 5 \tan^2 \varphi + 3 \tan^4 \varphi) \end{aligned}$$

$$K = k_0 \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2N_a^2} \cos^2 \varphi (1 + \eta_a^2) \right)$$

- **Reducción angular a la cuerda:**

$$dT_A = \frac{(y_B - y_A)(2x_A + x_B)}{6N^2 k_0^2} (1 + \eta^2)$$

$$dT_B = \frac{(y_A - y_B)(2x_B + x_A)}{6N^2 k_0^2} (1 + \eta^2)$$

■ **Proyección U.T.M.**

La proyección Universal Transversa Mercator establece unos valores estándar para los parámetros de la proyección. Para la elección del meridiano central se divide la tierra en 60 husos de 6° de anchura:

- N° del huso U.T.M. al que corresponde una longitud λ

$$n = \left\lfloor \frac{\lambda^\circ + 180 \bmod 360}{6} \right\rfloor + 1$$

- Meridiano central λ_{MC} correspondiente a un huso n

$$\lambda_{MC} = (6n - 183)^\circ$$

■ **Valores estándar de los parámetros:**

$$\lambda_0 = \lambda_{MC}$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$k_0 = (1 - 1 : 2.500) = 0,9996$$

$$x_0 = 500.000$$

$$y_0 = 0 \text{ para el hemisferio Norte}$$

$$y_0 = 10.000.000 \text{ para el hemisferio Sur}$$

■ **Cálculo del arco de elipse meridiana:**

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2) \int_0^\varphi \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

Esta integral se puede transformar en una integral elíptica de segunda clase, para la cual, el método iterativo de la media aritmético-geométrica (A.G.M.) puede proporcionar una aproximación tan exacta como se desee:

$$\beta(\varphi) = a \left[\int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} d\phi - \frac{e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right]$$

También podemos aproximar la integral mediante un desarrollo en serie, lo cual facilita además la resolución numérica de la ecuación inversa, para el cálculo de la latitud aproximada:

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2) \left(M_1 \varphi - \frac{M_2 \sin 2\varphi}{2} + \frac{M_3 \sin 4\varphi}{4} + \frac{M_4 \sin 6\varphi}{6} + \frac{M_5 \sin 8\varphi}{8} + \frac{M_6 \sin 10\varphi}{10} + \dots \right)$$

$$M_1 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \dots$$

$$M_2 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \dots$$

$$M_3 = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \dots$$

$$M_4 = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \dots$$

$$M_5 = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \dots$$

$$M_6 = \frac{693}{131072}e^{10} + \dots$$

▪ **Nota:**

Aplicando estas equivalencias en las fórmulas directas se obtienen las expresiones dadas por Snyder.

$$14\eta^2 - 58 \tan^2 \varphi \eta^2 = 72\eta^2 - 58e'^2$$

$$270\eta^2 - 330 \tan^2 \varphi \eta^2 = 600\eta^2 - 330e'^2$$

▪ **Derivación de las Fórmulas**

Escribiremos la transformación utilizando una función de variable compleja, $F(\Phi + \lambda i) = \Delta y + \Delta x i$, así:

$$y + x i = y_0 + x_0 i + k_0 F(\Phi + \lambda i)$$

Donde Φ es la latitud isométrica:

$$\Phi = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right]$$

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{\rho}{N \cos \varphi}$$

Por tanto tendremos $\frac{\partial F}{\partial \Phi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{N \cos \varphi}{\rho}$, e.g. $\frac{\partial \beta}{\partial \Phi} = N \cos \varphi \frac{\partial^2 \beta}{\partial \Phi^2} = -N \cos \varphi \sin \varphi$ ■

La función F cumple:

$$F(\Phi + \lambda_0 i) = \beta'(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho d\varphi$$

Para calcular la transformación directa desarrollaremos F en serie a partir del punto $\Phi + \lambda_0 i$ ($\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$)

$$F(\Phi + \lambda i) = F(\Phi + \lambda_0 i) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} [(\Phi + \lambda i) - (\Phi + \lambda_0 i)]^j \frac{\partial^j F}{\partial \Phi^j}(\Phi + \lambda_0 i)$$

$$= \beta'(\varphi) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\Delta \lambda i)^j \frac{\partial^j \beta'}{\partial \Phi^j}(\varphi)$$

En las fórmulas presentadas más arriba se han desarrollado las series hasta el término de orden seis.

Para la transformación inversa tomamos $\varphi_\alpha = \beta'^{-1}(\Delta y)$, i.e. $\beta'(\varphi_\alpha) = \Delta y$. Tenemos que $F^{-1}(\Delta y) = \varphi_\alpha + \lambda_0 i$ y desarrollamos F^{-1} en serie alrededor de Δy :

$$F^{-1}(\Delta y + \Delta x i) = F(\Delta y) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} [(\Delta y + \Delta x i) - \Delta y]^j \frac{\partial^j F^{-1}}{\partial \Phi^j}(\Delta y)$$

$$= \varphi_\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\Delta x i)^j \frac{\partial^j \Phi}{\partial \beta'}(\varphi_\alpha)$$

■ **Uso del módulo de deformación lineal**

Dada la distancia en proyección entre dos puntos, d_p , podemos aproximar la distancia geodésica entre ambos como $d_e = (1/K)d_p$, calculando K en función de los módulos de deformación lineal en los puntos, K_1 , K_2 , y en el punto medio en proyección entre ambos, K_m , así:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{4}{K_m} + \frac{1}{K_2} \right)$$

■ **Uso de la reducción a la cuerda**

Dados dos puntos en proyección de coordenadas en proyección (x_A, y_B) , (x_B, y_B) , sea γ la convergencia de meridianos en el punto A y dT_A la reducción angular a la cuerda; sea $\Delta x = x_B - x_A$ y $\Delta y = y_B - y_A$.

El acimut plano en proyección es $t = \arctan(\Delta x/\Delta y)$. El acimut geodésico proyectado es $T = t + dT_A$. El acimut geodésico (en el elipsoide) es $\alpha = T + \gamma$.