

Taller de Mates

4° ESO

Fernando Lafuente Clavero

OBJETIVOS GENERALES

El desarrollo de esta materia ha de contribuir a que los alumnos/as adquieran las siguientes capacidades:

- ❑ Utilizar sus conocimientos matemáticos y su capacidad de razonamiento en un ambiente próximo a la vida cotidiana para resolver situaciones y problemas reales o lúdicos.
- ❑ Diseñar y manipular modelos materiales que favorezcan la comprensión y solución de problemas, valorando la interrelación que hay entre la actividad manual y la intelectual.
- ❑ Realizar cuidadosamente tareas manuales y gráficas, diseñándolas y planificándolas previamente, valorando los aspectos estéticos, utilitarios y lúdicos del trabajo manual bien hecho.
- ❑ Utilizar modelos informáticos que informen la resolución de ciertos problemas, conocer algunas aplicaciones de la informática en su entorno inmediato y valorar críticamente su incidencia e importancia en las formas de vida actuales.
- ❑ Trabajar en equipo para llevar a cabo una tarea, sabiendo confrontar las opiniones propias con las de los compañeros, aceptar y desarrollar en grupo las mejores soluciones, etc., valorando las ventajas de la cooperación.
- ❑ Afrontar sin inhibiciones las situaciones que requieran el empleo de las matemáticas, utilizarlas en el lenguaje cotidiano para expresar sus ideas y argumentos, conociendo y valorando sus propias habilidades y limitaciones.
- ❑ Desarrollar la capacidad de descubrir y apreciar los componentes estéticos de objetos y situaciones, disfrutando con los aspectos creativos, manipulativos y utilitarios de las matemáticas.
- ❑ Conocer y valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, así como sus relaciones con diferentes aspectos de la actividad humana y otros campos de conocimiento (ciencia, tecnología, economía, arte...).
- ❑ Elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, utilizando distintos recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuese necesario.
- ❑ Buscar, organizar e interpretar con sentido crítico informaciones diversas relativas a la vida cotidiana, utilizándolas para formarse criterios propios en la toma de decisiones.
- ❑ Actuar con imaginación y creatividad, valorando la importancia no sólo de los resultados, sino del proceso que los produce.

CONTENIDOS

1. FORMAS Y TAMAÑOS

CONCEPTOS

- ❑ Formas. Superficies y volúmenes.
- ❑ Simetrías, regularidades y movimientos en las formas.
- ❑ Proporción y escala
- ❑ Medidas: longitudes, áreas y volúmenes.
- ❑ El plano y el espacio. Relaciones y representaciones.

PROCEDIMIENTOS

- ❑ Indagación de propiedades de los objetos: forma, medida, proporciones, regularidades, cualidades dinámicas...
- ❑ Diseño de cuerpos y objetos que se adecuen a unas características o funciones dadas.
- ❑ Construcción de objetos con características dadas, utilizando los materiales e instrumentos más adecuados.
- ❑ Utilización de distintos puntos de vista para analizar un objeto y desarrollar la visión espacial: perspectivas, secciones, proyecciones...
- ❑ Búsqueda de códigos y elaboración de esquemas para tratamientos abstractos de situaciones concretas.
- ❑ Descomposición de objetos en sus partes elementales.
- ❑ Composición, mediante sus elementos simples, de objetos predefinidos.
- ❑ Construcción de planos y maquetas a una escala adecuada.
- ❑ Estimación y medida del tamaño (longitud, superficie o volumen) de objetos con la precisión necesaria que requiera el caso.
- ❑ Manipulación de materiales ya elaborados (pentaminós, poliminós, policubos, libro de espejos...)
- ❑ Utilización de materiales sencillos para analizar, conjeturar, construir, comprobar...

ACTITUDES

- ❑ Tenacidad y constancia en la realización de modelos geométricos.
- ❑ Realización material cuidadosa de los modelos geométricos, valorando el trabajo bien hecho.
- ❑ Aprecio de la componente estética de los objetos y formas.
- ❑ Curiosidad ante objetos y hechos nuevos.
- ❑ Valoración de componentes estéticos y utilitarios como la armonía, el equilibrio...
- ❑ Valoración de la interrelación entre la actividad manual y la intelectual.

2. MODELOS MATEMÁTICOS

CONCEPTOS

- ❑ Simulación (simulación como medio de estudiar una situación no realizable experimentalmente, mecanismos de simulación, muestras como modelos de una población).
- ❑ Modelos geométricos (materiales y herramientas utilizables en la construcción de modelos geométricos).
- ❑ Modelos simbólicos (códigos numéricos, alfanuméricos y gráficos como instrumento para representar y simplificar la resolución de un problema, algoritmos recurrentes).
- ❑ Modelos físicos y mecánicos (objetos articulados simples, experiencias de carácter dinámico, fenómenos naturales: eclipses, ópticos, meteorológicos...)
- ❑ Modelos topológicos (cuerdas, nudos, huecos, laberintos...)

PROCEDIMIENTOS

- ❑ Selección exhaustiva de las características fundamentales del fenómeno a estudiar, distinguiéndolas de lo accesorio.
- ❑ Búsqueda y selección de la codificación y notación que mejor se ajusten al fenómeno o proceso.
- ❑ Selección del material y herramientas a utilizar.
- ❑ Comprobación del ajuste entre la representación y lo representado.
- ❑ Simplificación de la situación.
- ❑ Planificación del trabajo: fragmentación en fases, etapas o partes del proceso.
- ❑ Revisión de los conceptos y leyes que rigen la situación a estudiar.
- ❑ Selección de fórmulas y algoritmos en que se pueden traducir dichas leyes.
- ❑ Revisión dinámica de la adecuación de los algoritmos del modelo a los principios y leyes de la realidad.
- ❑ Contraste entre varios modelos y valoración de su adecuación a la realidad.
- ❑ Inversión del proceso: partir de un modelo y descubrir las situaciones a las que se puede aplicar.
- ❑ Utilización de técnicas de trabajo en equipo y de división de tareas.

ACTITUDES

- ❑ Curiosidad ante situaciones y fenómenos de la vida cotidiana.
- ❑ Disposición a realizar abstracciones partiendo de situaciones concretas.
- ❑ Aplicación de hábitos y métodos de investigación sistemática.
- ❑ Imaginación y tenacidad en la planificación del trabajo.
- ❑ Gusto por la precisión y el trabajo.

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CONCEPTOS

- ❑ Distinción entre problema y ejercicio.
- ❑ Ejemplos y contraejemplos. Plausibilidad y certeza.
- ❑ Soluciones de un problema: distintos niveles (más o menos exactas, más o menos generales, más o menos elegantes...)
- ❑ Fases de la resolución de un problema (algún modelo sencillo: familiarización, diseño de un plan, desarrollo del plan...)

PROCEDIMIENTOS

- ❑ Utilización de distintos códigos y lenguajes para representar los elementos de un problema.
- ❑ Selección del código o lenguaje más adecuado para representar una situación dada.
- ❑ Construcción de modelos materiales para visualizar un problema.
- ❑ Descripción verbal de un problema y de la estrategia seguida de su resolución.
- ❑ Utilización del “brainstorming” u otro método para acercarse a un problema, anotando todas las ideas emitidas.
- ❑ Decisión, individual o colectiva, sobre la estrategia a seguir en un problema dado.
- ❑ Distribución de roles y tareas en el grupo para llevar a cabo la estrategia propuesta.
- ❑ Selección y utilización de fórmulas o algoritmos aplicables en una situación dada.
- ❑ Consideración exhaustiva de todos los casos posibles de un enunciado dado.
- ❑ Selección de los datos relevantes de un problema dado.
- ❑ Formulación de hipótesis.
- ❑ Utilización del método de ensayo y error para comprobar hipótesis.
- ❑ Reducción de un problema a otro más sencillo (con menos datos o variables, del espacio al plano...) para acercarse a la solución.
- ❑ Utilización de problemas análogos conocidos para resolver uno desconocido.
- ❑ Utilización del modo inductivo, o el análisis de algún caso particular, para aventurar soluciones.
- ❑ Revisión de la estrategia utilizada, cambiándola si es preciso por otra nueva.
- ❑ Utilización de técnicas de desbloqueo ante un problema (cambio de lenguaje, de punto de vista, dejarlo reposar...)
- ❑ Comprobación de las soluciones obtenidas.
- ❑ Análisis crítico del proceso seguido en la resolución del problema y de las soluciones obtenidas.
- ❑ Formulación de un problema nuevo a partir de otro conocido.
- ❑ Aplicación del problema a otros casos (viéndolo, p. ej. como una propiedad interesante de números o figuras).

ACTITUDES

- ❑ Curiosidad y actitud de interrogación ante situaciones desconocidas.
- ❑ Decisión y confianza para enfrentarse a un problema o situación desconocida.
- ❑ Planificación cuidadosa de las tareas a realizar.
- ❑ Imaginación y creatividad a la hora de aventurar hipótesis.
- ❑ Tenacidad para llevar a cabo las tareas propuestas.
- ❑ Gusto por confrontar las estrategias y soluciones dadas con las de los demás.
- ❑ Disposición a cambiar el punto de vista propio o aceptar el de los demás.
- ❑ Valoración crítica de la solución de un problema, admitiendo el carácter relativo y mejorable de la misma.
- ❑ Disposición a mejorar las soluciones obtenidas.
- ❑ Tendencia a formularse un problema nuevo a partir de uno dado y a explotar al máximo una situación-problema.
- ❑ Valoración de la utilidad del trabajo en equipo para resolver eficazmente muchos problemas.

4. JUEGOS LÓGICOS Y DE ESTRATEGIA

CONCEPTOS

- ❑ Juegos lógicos (premisas, conjeturas y conclusiones; demostración y comprobación, contraejemplos; paradojas, falacias; formas de razonamiento lógico: inducción, deducción, reducción al absurdo).
- ❑ Juegos estratégicos (previsiones y simplificaciones en el juego; momentos críticos en el juego; códigos y tabulaciones; las fases del juego y su revisión dinámica; estrategias ganadoras).

PROCEDIMIENTOS

- ❑ Identificación de las variables del juego (qué pide el juego, qué datos nos da, qué normas lo regulan...)
- ❑ Utilización de las premisas de forma adecuada.
- ❑ Discusión de conjeturas para elegir la mejor estrategia de resolución del juego.
- ❑ Utilización del razonamiento lógico para llegar a la conclusión adecuada.
- ❑ Comprobación del sentido lógico de las conclusiones.
- ❑ Formulación de conjeturas sobre las posibles soluciones.
- ❑ Colaboración con los demás para seguir las pautas del razonamientos lógico o de la estrategia.
- ❑ Simplificación del juego para hacer más sencillo su resolución y aplicarlo en el original.
- ❑ Utilizar distintas estrategias en el juego para determinar la más favorable en cada momento.
- ❑ Análisis simultáneo de varias líneas de avance y toma de decisiones sobre las más convenientes.
- ❑ Subjetivación de las situaciones (ponerse en el lugar del otro).

- ❑ Inversión del proceso (comenzar por la posición final para descubrir la estrategia de la resolución del juego).

ACTITUDES

- ❑ Reconocimiento del papel del razonamiento lógico como medio para resolver problemas y situaciones cotidianas.
- ❑ Disposición favorable a emplear el razonamiento lógico en dichos casos.
- ❑ Cautela y sentido crítico ante las aparentes soluciones intuitivas.
- ❑ Interés y respeto por el razonamiento en cualquier tipo de actividad.
- ❑ Respeto a las normas del juego.
- ❑ Tendencia a la búsqueda y aplicación de estrategias óptimas.

5. LAS MATEMÁTICAS DEL ENTORNO COTIDIANO

CONCEPTOS

- ❑ Presencia de formas geométricas planas y del espacio.
- ❑ Transformaciones geométricas.
- ❑ Medida y estimación de las magnitudes.
- ❑ Proporción, equilibrio y armonía.
- ❑ Informaciones de carácter matemático presentes en la vida cotidiana.
- ❑ Números, tablas, códigos.
- ❑ Porcentajes, índices.
- ❑ Simulación y planificación de actividades complejas.
- ❑ Organigramas, diagramas, grafos.
- ❑ Gráficas y funciones.

PROCEDIMIENTOS

- ❑ Identificación del contenido matemático presente en textos cotidianos (prensa, propaganda...)
- ❑ Interpretación de porcentajes, índices, tablas de datos, gráficas... para describir mejor una situación o apoyar un argumento.
- ❑ Utilización de programas informáticos con un propósito determinado.
- ❑ Planificación y simulación de tareas complejas.
- ❑ Diseño y utilización de modelos matemáticos sencillos para describir una situación.
- ❑ Codificación de situaciones y utilización de diagramas, organigramas... para representar una situación compleja.
- ❑ Recogida de datos e informaciones con un propósito específico.
- ❑ Obtención y tratamiento de datos numéricos para predecir un hecho o fenómeno.
- ❑ Estimación y medida de diferentes magnitudes.
- ❑ Utilización y realización de mapas, planos, esquemas... para estudiar la realidad.
- ❑ Análisis de formas y proporciones en el arte, la arquitectura, la artesanía y en los objetos tecnológicos y cotidianos.

- Utilización de medios audiovisuales para estudiar aspectos de la realidad dentro del aula.
- Investigación de elementos en la cultura matemática en la actualidad y en el pasado.

ACTITUDES

- Valoración de las matemáticas como instrumento útil para conocer el entorno cotidiano, desenvolverse mejor en él y tomar decisiones.
- Actitud crítica ante las informaciones (prensa, publicidad, transacciones bancarias...) que utilizan argumentos lógicos o matemáticos.
- Disposición a estudiar lo que de matemático hay en muchas situaciones cotidianas.
- Tendencia a consultar varias fuentes de información sobre una situación dada.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar los problemas matemáticos de la vida diaria.
- Apreciación de la belleza ligada a regularidades y cadencias.

EVALUACIÓN Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. La evaluación en el Taller de Matemáticas.

El grado de consecución de los objetivos en base a los contenidos de la asignatura revierten en la valoración de los logros de aprendizaje realizados por los alumnos a lo largo del desarrollo de la materia. Es pues, en la evaluación, cuando se constata realmente el resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje y su asimilación por parte de los estudiantes.

Esta asignatura es lo suficientemente rica en matices y metodología como para que los instrumentos de evaluación tengan que ser forzosamente diversos y flexibles; por otro lado, el propio carácter dinámico y con frecuencia grupal de la materia hacen que el proceso sea menos directo y acaso más arduo que en otras disciplinas.

En todo caso, y evitando concebir al docente como un notario que recoge exhaustivamente todos y cada uno de los movimientos y detalles de sus alumnos, el profesor basará su valoración en la observación del trabajo desempeñado por cada uno en clase, así como su interés y disposición hacia las tareas del taller. No se perderá de vista su integración y rol en los grupos cuando éstos se formen para realizar las actividades. Potenciará también la autoevaluación y la coevaluación, siendo ésta última, a priori, más fácilmente aplicable que en otras materias por la gran cantidad de experiencias colectivas que se llevan a cabo.

Se enumeran a continuación los criterios de evaluación de forma clara y concisa, adjudicándose a cada uno un valor cuantitativo pero esencialmente orientador que servirá al alumno como referencia para sus esfuerzos y sobre todo al profesor como guía en sus calificaciones.

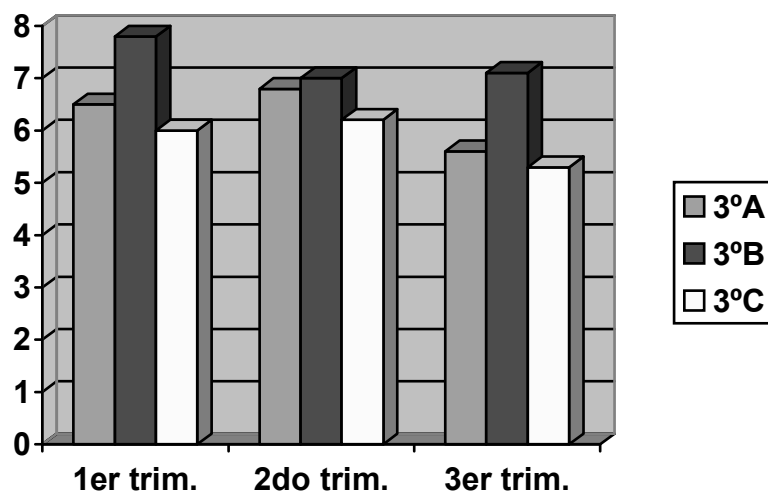
2. Criterios de evaluación.

En esta asignatura se valorará lo siguiente y en la siguiente cuantía:

- Pruebas escritas (controles, tests, ejercicios, problemas...) 60 %
- Trabajo en clase (esmero y cuidado estético, respeto y eficacia con los materiales, integración y participación en los grupos...) ... 30 %
- Interés y dedicación dentro y fuera del aula (diligencia a la hora de traer y elegir los materiales, de hacer las tareas en casa, etc). ... 10 %

UNIDAD DIDÁCTICA 1

Estadística



UNIDAD DIDÁCTICA 1.

ESTADÍSTICA: Medidas de centralización, dispersión y posición.

Contenidos asociados

- Modelos matemáticos
- La matemática del entorno cotidiano

Secuenciación

De dos a tres sesiones, una de las cuales al menos deberá ser en la sala de informática.

Materiales y recursos

Los alumnos se dispondrán por parejas. Se necesitarán calculadoras y la sala de informática. Se utilizará el programa *Estaplus*.

Tratamiento teórico.

1. Variable, población y muestra.

Todo cálculo estadístico trata de sacar una serie de conclusiones cualitativas o cuantitativas sobre un determinado aspecto (denominado *variable*) relacionado con los elementos objeto de estudio. Dichos elementos son de un tipo o categoría que define nuestra *población* estadística y entre ellos seleccionaremos un subgrupo representativo, más o menos amplio, sobre el que haremos concretamente nuestro análisis y que llamaremos *muestra*. Por ejemplo, podríamos preguntarnos por las estaturas (*variable*) de las chicas españolas de quince años (*población*) tomando mil al azar de cada capital de provincia (*muestra*).

Una vez obtenidos los datos correspondientes a la variable que nos interesa estudiar, podemos buscar magnitudes que nos den una idea de cómo se comporta la muestra en su totalidad respecto a esa variable. En el ejemplo anterior podríamos cuestionarnos si, globalmente, nuestros alumnos se acercan a una talla u otra. Este tipo de sondeo da lugar a tres medidas diferentes, aunque orientadas a propósitos similares, llamadas de *centralización*.

2. Medidas de centralización.

Cuando pretendemos ofrecer una visión global de una muestra respecto a una variable podemos hacerlo de tres maneras que dan lugar a otras tantas medidas:

- *Media* (\bar{x}): se obtiene hallando un promedio entre todos los valores recogidos. Su fórmula es la siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i f_i x_i}{N} \quad \text{donde } f_i \text{ es la frecuencia (n}^\circ \text{ veces que se repite) del valor } x_i \text{ y } N$$

el número de datos.

- *Moda* (*Mo*): se obtiene determinando el valor que más se repite. La moda puede corresponder a más de un valor.
- *Mediana* (*Me*): se obtiene ordenando los valores de menor a mayor y escogiendo el dato que ocupa exactamente el puesto central. Si el número de datos es impar, la elección es inmediata; si es par se hace la media entre los dos valores centrales.

3. Medidas de dispersión.

Una vez que sabemos de modo general cómo se comporta la muestra relativa a nuestra variable, nos puede interesar saber hasta qué punto el resto de los valores está alejado de las medidas centrales, sobre todo de la media. Para ello, los estadísticos disponen de las medidas de *dispersión*. Se suele considerar la *desviación típica* y la *varianza*.

- *Varianza* (σ): se halla calculando la diferencia entre el promedio de los cuadrados de los valores obtenidos y la media al cuadrado. Su fórmula es la siguiente:

$$\sigma = \frac{\sum_i f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

- *Desviación típica* (s): se obtiene hallando la raíz cuadrada de la varianza. Tiene la ventaja de estar expresada en las mismas unidades que los datos recogidos.

$$s = \sqrt{\sigma}$$

4. Medidas de posición.

Como el propio nombre indica, nos informan de cómo están situados los datos. Hay de varios tipos: los más usados son los *cuartiles* y los *centiles*. Al ser cualitativamente análogos, trataremos sólo los primeros.

Paralelamente a la mediana, los cuartiles dividen a los datos ordenados de menor a mayor en cuatro grupos de igual número de elementos. De aquí puede deducirse inmediatamente que existen tres cuartiles y que el segundo de ellos coincide precisamente con la mediana. Al primer cuartil se le llama o bien así, Q1, o bien cuartil inferior QI. Al tercero se le denomina Q3 o superior QS. Los cuartiles dan idea de en qué grupo estimativo está un determinado dato, es decir y poniendo un ejemplo, si un alumno está entre los 25% mejores, o entre los 50% peores etc. En el primer caso nuestro alumno estaría por encima del tercer cuartil y en el segundo por debajo de la mediana.

Los cuartiles se calculan fácilmente, pero hay que tener en cuenta si disponemos de un número par o impar de datos. Si es un número par, se señalan con tres flechas los cuatro grupos de igual número de elementos. 1,1, \uparrow 2,3,4, \uparrow 5,5,5,6,6; aquí la mediana sería 4.5, el primer cuartil 2 y el

tercero 5. Si los cuartiles no son exactos se hace la media entre los números que separan las flechas. Si es un número impar, el cálculo de cuartiles ha de hacerse de manera aproximada: se divide el número de datos entre cuatro y se aproxima el resultado por exceso, de modo que si sale por ejemplo 3.25, el primer cuartil será el cuarto elemento empezando por la izquierda y el tercer cuartil el cuarto empezando por la derecha. *Ejemplo:* 1,1, \uparrow 2,3,4, \uparrow 5,5,5, \uparrow 6,6,6 La mediana será 5, el primer cuartil será 2 (el tercer elemento $11/4 = 2.75 \rightarrow 3$) y el tercer cuartil será 6 (análogo contando por la derecha).

5. Estaplus: un programa sencillo de estadística.

Estaplus es un programa fácil de manejar y dotado de cierta potencia, aunque tiene la deficiencia de que no está preparado para elaborar gráficos. Dado que incluso *word* puede hacerlo sin más que introducirle los datos, no resultará un problema. *Estaplus* ofrece una simple y cómoda forma de registrar los valores de la variable en estudio e ilustra sobre conceptos útiles como frecuencias relativas, absolutas y acumuladas. Una vez introducidos los valores estadísticos arroja una gran gama de resultados como medias, cuartiles, coeficientes de

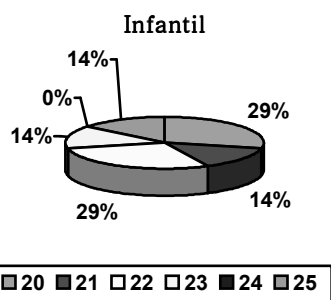
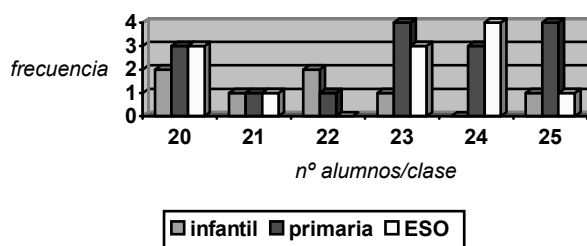
Pearsson, etc, que servirán a los alumnos para cotejar sus resultados. Dada su versatilidad, no es un programa meramente educativo sino que puede ser utilizado por ellos en el futuro para análisis estadísticos reales y más complicados (variable continua, análisis bidimensional, etc).

Tratamiento práctico.

Nos dispondremos en parejas, cada uno de las cuales se encargará de averiguar parte de los datos que necesitaremos. Cuando hayamos reunido todos, cada grupo por separado hará sus propios cálculos y elaborará sus propios gráficos. El procedimiento será el siguiente:

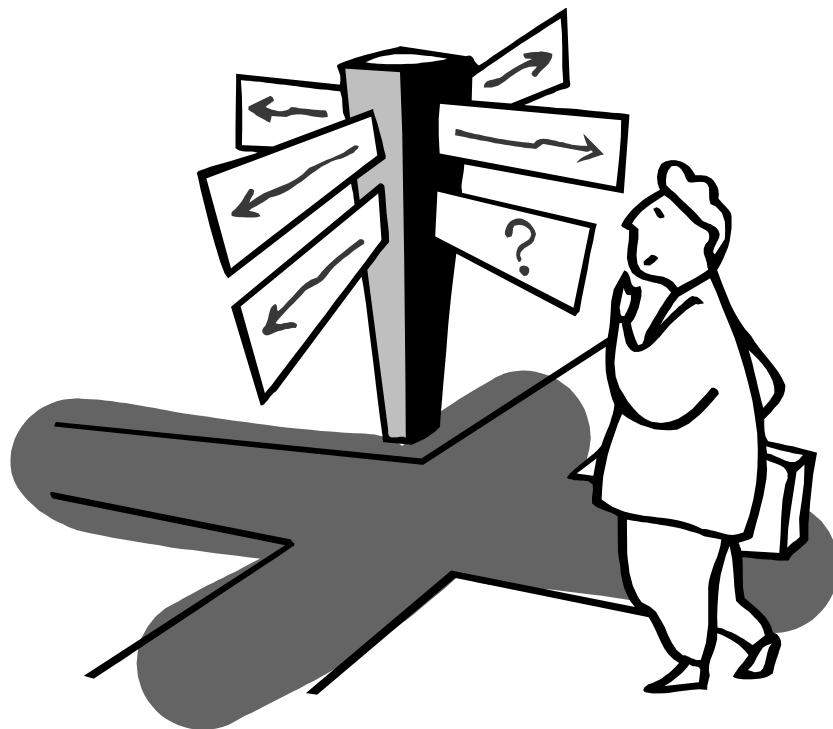
1. Elegimos como variable discreta el nº alumnos por aula, desde infantil hasta secundaria. A cada grupo se le asignará una serie de aulas para que indague sobre los datos correspondientes a la variable.
2. Una vez conseguidos los datos, se pondrán en común y cada grupo realizará ordenadamente los cálculos de las medidas de centralización. El portavoz recopilará los datos e intentará, junto con su compañero/a, hacer una lectura razonada de los resultados obtenidos.
3. Tras una primera valoración global de los datos, veremos si éstos tienden o no a desviarse de la media, para lo que calcularemos las medidas de dispersión. Después, nuevamente, cada grupo tratará de interpretar los resultados.
4. Por último, y recordando cómo se halló la mediana, se calcularán los otros dos cuartiles (medidas de posición).
5. Determinados todos los valores de las medidas de centralización, dispersión y posición, los alumnos completarán la actividad en la sala de informática. Tras una concisa explicación del profesor acerca del programa a utilizar, los datos se introducirán en *Estaplus* y se comprobarán aciertos y errores. Se ilustrarán las medidas de posición con el diagrama de cajas y bigotes.
6. Se elaboran, con el propio procesador de textos (*Word*), gráficos que reflejen los datos obtenidos y sirvan de marco estadístico a nuestros cálculos y conclusiones.
7. Cada grupo entregará finalmente un fichero de *word* en el que figurarán ordenadamente sus resultados, sus gráficos y una valoración personal sobre el proceso y materiales utilizados.

Colegio Salesiano



UNIDAD DIDÁCTICA 2

Lógica e ingenio



UNIDAD DIDÁCTICA 2.

LÓGICA: Acertijos matemáticos, problemas de lógica y pensamiento transversal.

Contenidos asociados

- Juegos lógicos y de estrategia
- Resolución de problemas

Secuenciación

Dos sesiones: una de “concurso” y otra de resolución/discusión de problemas.

Materiales y recursos

Los alumnos se situarán por parejas. Podrán utilizar el material normal de clase y la calculadora.

Tratamiento de la actividad.

En contraste con otras actividades del taller, en las que hay una parte teórica que enseñar o recordar a los alumnos, en esta sólo necesitan coordinación, paciencia y claridad mental. Se les entregará unas hojas de problemas divididos en dos bloques: acertijos matemáticos y problemas de ingenio (lógicos). A los primeros, por precisar un poco más de elaboración y cálculo, se le adjudicará un valor mayor, pero cada pareja tratará de encontrar solución (a veces no única) a todos los que pueda.

El profesor planteará una especie de competición amigable según la cual se distribuirá la clase de dos en dos (si son impares se hará un grupo especial de tres, nunca se dejará a nadie solo). Cada miembro del grupo podrá (y deberá en muchos casos) comentar los problemas con su compañero/a, con objeto de obtener el mejor rendimiento. Los grupos deberán discutir los ejercicios en voz baja, a riesgo de revelar sus soluciones o sus métodos a otros compañeros que, en esta actividad, compiten con ellos.

Como tal concurso, tendrá unas reglas, un tiempo máximo y una recompensa para los ganadores; serán los siguientes:

- ❑ Cada grupo dispondrá de una hoja definitiva en la que entregará las soluciones de los problemas resueltos con la explicación detallada y el número final si ha lugar.
- ❑ El valor de los problemas será como sigue: se contará dos puntos por cada acertijo resuelto correctamente y un punto por cada prueba de ingenio contestada de manera adecuada.
- ❑ Dado que no necesita grandes explicaciones, el concurso durará una sesión de clase hasta el término de la misma.
- ❑ Se considerará ganadoras a las cinco parejas que más puntos obtengan (un total de diez ganadores) y sus integrantes recibirán un positivo. De ellos saldrá una pareja ganadora absoluta que recibirá otro positivo adicional. En caso de empate se puede considerar, si fuera preciso, más de cinco parejas ganadoras.
- ❑ Si el profesor advierte que algún miembro del grupo se evade o no colabora, se le avisará a él y a su compañero/a y en caso de persistir con su actitud se le descalificará.

La sesión siguiente se dedicará a resolver los problemas, procurando que los alumnos tengan una participación activa en el proceso. Cuantos más ejercicios solucionen ellos mismos y expongan sus conclusiones al resto, mejor.

Acertijos y problemas lógicos

Los alumnos habrán de resolver problemas y ejercicios de entre una relación de quince de los primeros y veinte de los segundos. Se adjuntan a continuación.

ACERTIJOS, PARADOJAS Y JUEGOS MATEMÁTICOS

ACERTIJOS MATEMÁTICOS

1. La viejecita en el mercado:

Una viejecita llevaba huevos al mercado cuando se le cayó la cesta.

- ¿Cuántos huevos llevabas? - le preguntaron,

- No lo sé, recuerdo que al contarlos en grupos de 2, 3, 4 y 5, sobran 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

¿Cuántos huevos tenía la viejecita?

2. La botella de vino

Si nos dicen que una botella de vino vale 10 euros y que el vino que contiene cuesta 9 euros más que el envase, ¿cuánto cuestan el vino y el envase por separado?.

3. Llenar la piscina:

Para llenar de agua una piscina hay tres surtidores. El primer surtidor tarda 30 horas en llenarla, el segundo tarda 40 horas y el tercero tarda cinco días. Si los tres surtidores se conectan juntos, ¿cuánto tiempo tardará la piscina en llenarse?.

4. María y Juan:

María tiene un hermano llamado Juan. Juan tiene tantos hermanos como hermanas. María tiene el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos chicos y chicas hay en la familia?

5. El vagabundo:

Un vagabundo se hace un pitillo con cada siete colillas que encuentra en el suelo. ¿Cuántos pitillos podrá fumarse si encuentra 49 colillas?

6. Juan y Pedro:

Juan le dice a Pedro: "si me das una oveja tengo yo el doble que tú". Pedro le contesta: "no seas tan listo, dámela tu a mí y así tenemos los dos igual" ¿Cuántas ovejas tiene cada uno?.

7. El tío y el sobrino:

Un tío le dice a su sobrino: " Yo tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, la suma de las dos edades será de 70 años". ¿Qué edad tienen ahora ambos?

8. Las tres hijas:

Dos amigos se encuentran por la calle y el primero le pregunta al otro: “¿qué tal están sus hijas y cuántos años tienen?” El segundo le contesta: “están bien, gracias. En cuanto a sus edades, el producto de las es 36 y la suma coincide con el número del portal en el que vives.” El primero le dice: “entonces, sólo me falta un dato” y el amigo le contesta: “es cierto, perdona. La mayor toca el piano”. ¿Cuál es la edad de cada hija?

9. La colección de monedas:

Un comerciante decide vender una colección de monedas de oro a tres coleccionistas. El primero compra la mitad de la colección y media moneda; el segundo, la mitad de lo que queda y media moneda y el tercero la mitad de lo que queda y media moneda. ¿Cuántas monedas tenía el comerciante?

10. Un problema de balanza sin pesas:

Una bolsa contiene 27 bolas de billar que parecen idénticas. Sin embargo, nos han asegurado que hay una defectuosa que pesa más que las otras. Disponemos de una balanza, pero no de un juego de pesas, de manera que lo único que podemos hacer es comparar pesos. Demuestra que se puede localizar la bola defectuosa con solo tres pesadas.

11. El lechero ingenioso:

Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros de capacidad para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podrá medir un litro sin desperdiciar la leche?

12. Un problema de peso:

Un tendero dispone de una balanza y cuatro pesas distintas, y estas pesas son tales que le permiten pesar cualquier número exacto de kilogramos desde 1 a 40. ¿Qué pesa cada una de las pesas?

13. Siempre diofanto:

¿Cuáles son los números de 3 cifras que cumplen la condición de que el producto de dichas cifras es igual a su suma?

14. Si nos falta la luz:

En un cajón hay 12 pares de calcetines negros y doce pares blancos. No habiendo luz en la habitación, usted quiere coger el mínimo número de calcetines que le asegure que obtendrá al menos un par del mismo color. ¿Cuántos calcetines deberá tomar del cajón?

15. El andarín

Un señor de 1,80 m de estatura camina siguiendo exactamente la línea del ecuador dando toda la vuelta a La Tierra. ¿Cuántos metros recorre más su cabello que la planta de sus pies?

PRUEBAS DE INGENIO

1. BARAJA

Con una baraja de 40 cartas, ¿Cuántas habrá que sacar para estar seguros de tener 7 naipes del mismo palo?

2. VASOS

En una barra de un bar hay diez vasos en hilera; los cinco primeros están llenos de limonada y los cinco últimos están vacíos. ¿Cuántos vasos hay que mover para formar con ellos una hilera donde los vacíos y los llenos se vayan alternando?

3. ANIMALES

¿Cuántos animales tengo en casa, sabiendo que todos son perros menos dos, todos son gatos, menos dos y que todos son loros menos dos?

4. PILOTO

¿Es posible que un piloto vuele 100 Km al sur, después, 100 Km hacia el este, y finalmente, otros 100 rumbo al norte y al final se encuentre exactamente en el punto de partida?

5. LAPICEROS

Forma cuatro triángulos equiláteros idénticos con sólo seis lapiceros iguales

6. EL MONSTRUO

Sabiendo que la longitud del monstruo de Leganés es de 20 metros más la mitad de su propia longitud, ¿Cuántos metros mide el monstruo?

7. EL TREN

Una joven sube al último vagón de un tren. Como no hay asientos libres, empieza a buscar sitio. El tren va a velocidad constante; cinco minutos más tarde ha llegado al vagón de cabeza y no hay sitio. En ese momento el tren pasa por la estación de Móstoles. Regresa al mismo paso hasta el vagón de cola y en ese momento se encuentra en Alcorcón a 5 Km de la estación de Móstoles . ¿A qué velocidad viaja el tren?

8. LA TAXISTA

Un señor muy charlatán entra en un taxi y la taxista, al cabo de unos minutos pierde la paciencia y le dice: Lo siento mucho señor, pero no oigo nada de lo que me dice. Soy sorda como una tapia, y mi audífono se ha estropeado. El señor se calló pero al bajar del taxi se dio cuenta de que la taxista no había dicho toda la verdad. ¿Cómo llegó a esa conclusión?

9. LA EDAD DEL TAXISTA

Usted es un taxista. Su taxi es amarillo y negro, y ya tiene siete años. Una de las escobillas del parabrisas está rota; el carburador está estropeado. En el depósito caben 50 litros y sólo está a tres cuartos de su capacidad. ¿Qué edad tiene el taxista?

10. JIRAFAS Y AVESTRUCCES

En el zoológico había jirafas y avestruces. En total había 30 ojos y 44 patas. ¿Cuántas jirafas y avestruces había?

11. EL GRUPO

Paul, John y George son músicos. Uno toca la guitarra, otro el piano y otro la batería. El batería quiso contratar al guitarrista, pero éste había salido de gira con el pianista.

El pianista gana más dinero que el batería. George gana menos que John. George nunca ha oído hablar de John. ¿Qué instrumento toca cada uno?

12. LA CAMA

La semana pasada conseguí apagar la luz de mi dormitorio y meterme en la cama antes de que la habitación quedase a oscuras. Hay tres metros desde la cama al interruptor de la luz. ¿Cómo lo hice?

13. EL LIBRO

Una noche, aunque mi tío estaba leyendo un libro apasionante, su mujer le apagó la luz. La sala estaba oscura como el carbón, pero mi tío siguió leyendo sin inmutarse. ¿Cómo es posible?

14. EL CAFÉ

Esta mañana se me cayó un pendiente en el café. Y, aunque la taza estaba llena, el pendiente no se mojó. ¿Y eso?

15. EL BARCO

Mi hermana no se atrevía a salir del camarote. A mediodía el ojo de buey situado junto a su litera se encontraba exactamente a 7 metros sobre el nivel del mar. En ese instante la marea subía a razón de 1 metro por hora. Suponiendo que la velocidad con que sube la marea se duplique cada hora, ¿cuánto tardará el agua en cubrir el ojo de buey?.

16. RELOJES DE ARENA

Se tienen dos relojes de arena. Uno dura 4 minutos, y el otro 7 minutos. Se quieren medir 9 minutos. ¿Cómo se puede lograr?

17. LOS MINEROS

Dos mineros al salir de la mina se saludan. Uno lleva la cara limpia y el otro la lleva cubierta de polvo de carbón. Al despedirse, el hombre de la cara limpia se fue a lavar y el otro no fue a lavarse. ¿Qué pasó?

18. ASESINO

Un criminal americano fue al cine con su mujer, a ver una película de tiros. Aprovechando una secuencia de disparos, asesinó a su mujer de un tiro en la cabeza. A continuación salió del cine con el cadáver sin que nadie hiciera nada por detenerlo. ¿Cómo se las arregló el asesino?

19. TRES EN RAYA

En un cuadrado con nueve casillas coloca los números del 1 al 9 de tal forma que sumen quince (horizontal, vertical y diagonal)

20. EL PERMISO DE CONDUCIR

Una señora se olvidó el permiso de conducir en casa. No se detuvo en un paso a nivel, despreció una señal de dirección prohibida y viajó en sentido contrario en una calle de sentido único y sin embargo el policía no se lo impidió. ¿Por qué?

UNIDAD DIDÁCTICA 3

Combinatoria

$$VR_3^6$$

UNIDAD DIDÁCTICA 3.

COMBINATORIA: Permutaciones, combinaciones y variaciones.

Contenidos asociados

- Matemáticas del entorno cotidiano
- Modelos matemáticos

Secuenciación

De dos a tres sesiones (una teórica, otra práctica y la última para completar alguna de las anteriores).

Materiales y recursos

Los alumnos harán grupos de tres. Se necesitarán calculadoras, boletos de QH, bono-loto y quinielas..

Tratamiento teórico.

Son muchas las ocasiones en la vida real en las que necesitamos hacer un recuento exacto de las diferentes posibilidades que se nos plantean a la hora de realizar una serie de elecciones, ordenamientos o disposiciones. No todas esas opciones se cuentan igual porque no todos los recuentos pertenecen al mismo tipo. Veamos diferentes casos:

1. Permutaciones.

A veces nos interesa saber de cuántas formas diferentes se pueden disponer varios elementos considerándolos como un todo. Queremos saber las posibles *permutaciones*.

Hay una fórmula muy sencilla para calcular las permutaciones de una serie de elementos, que sólo depende del número de éstos. No obstante, para entenderla hay que introducir el concepto de *factorial*. El factorial debe considerarse un operador más, como pueda ser el cuadrado y la raíz cúbica: del mismo modo que el cuadrado de 4 es 16 y la raíz cúbica de -8 es -2, el factorial de un número natural, p. ej. 3 será otro número natural, esto es 6.

Se define factorial de n, escrito n!, como $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 1$. Así, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Por convenio se toma también $0! = 1$.

Una vez conocido este operador, se cumple que el número de permutaciones de n elementos es precisamente n!. Matemáticamente:

$$P_n = n!$$

2. Combinaciones.

Otras veces, lo que queremos saber es de cuántas maneras podemos escoger un número de elementos de entre otros (un conjunto de ellos, como mínimo igual y normalmente mayor que el subconjunto que pretendemos extraer) sin importar el orden. En este caso, el recuento que precisamos realizar tiene que ver con otro concepto distinto: las *combinaciones*. Nos estaríamos preguntando por las combinaciones si quisiéramos saber, p. ej., de cuántas formas podría escoger tres colores diferentes entre todos los del arco iris.

De forma general, las combinaciones posibles de n elementos cogidos de k en k se expresan como:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

3. Variaciones sin y con repetición..

Supongamos que nuestro interés es muy similar al caso anterior, es decir conocer de cuántos modos puedo coger varios elementos de un conjunto, pero ahora sí nos importa el orden. No estamos ante un problema de combinaciones sino de *variaciones*, y resulta además muy importante detallar si se permiten o no repeticiones.

Si en nuestra elección no podemos incluir dos o más veces el mismo elemento, estamos en un caso de variaciones *sin repetición*. Se habla de variaciones sin repetición de n elementos cogidos de k en k y su fórmula es:

$$V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Si en nuestra elección sí podemos incluir dos o más veces el mismo elemento, estamos en un caso de variaciones *con repetición*. Se habla de variaciones con repetición de n elementos cogidos de k en k y su fórmula es:

$$VR_n^k = n^k$$

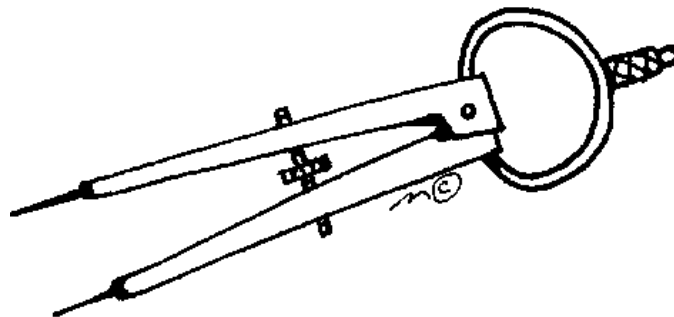
Tratamiento práctico.

Nos dispondremos en grupos, cada uno de los cuales se encargará de encontrar ejemplos prácticos de la vida real que puedan relacionarse con alguna de las cuatro opciones: permutaciones, combinaciones, variación sin repetición y con repeticiones. A partir de ahí seguirán los siguientes pasos:

1. Una vez encontradas varias de estas situaciones, los diferentes grupos pondrán un ejemplo concreto de cada cuál, esto es, especificando el número de elementos y harán los cálculos, que serán analizados y corregidos en clase.
2. Cuando los grupos muestren tener las ideas más o menos claras, se les pedirá que saquen los boletos de quinielas, bono-loto y QH que hayan podido conseguir, que los valoren con cuidado y que intenten asociarlos con alguno de los cuatro casos dados en la parte teórica.
3. Cuando hayan identificado la quiniela con VR , la QH con V y la bono-loto con C , se les cuestionará sobre las posibles maneras de distribuirlos a todos en los diferentes pupitres (permutaciones, P)
4. Se les “invitará” a que calculen las diferentes posibilidades de una quiniela sin dobles ni triples ($VR_{15}^3 = 3^{15}$), una QH con diez caballos ($V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$), una bono-loto normal ($C_{40}^6 = \frac{40!}{34! 6!}$) y las de la clase ($P_n = A!$, con A el nº alumnos).
5. *Opcional.* ¿Se complica mucho la cosa si hay apuestas dobles o triples? ¿Por qué? ¿Nos atreveríamos a calcularlas con ayuda de la lógica y lo que hemos aprendido?

UNIDAD DIDÁCTICA 4

Vectores



UNIDAD DIDÁCTICA 4.

GEOMETRÍA DEL PLANO: Sistema de coordenadas. Puntos y vectores.

Contenidos asociados

- Formas y tamaños
- Matemáticas del entorno cotidiano

Secuenciación

Dos sesiones en las que se alternará teoría y práctica.

Materiales y recursos

Los alumnos se dispondrán por parejas. Se utilizarán calculadoras, lápices, gomas, reglas, escuadras y cartabones, transportador de ángulos y un plano de las calles de Huesca.

Tratamiento teórico.

En esta unidad didáctica se manejarán elementos ya conocidos por los alumnos pero poco tratados de manera práctica en la asignatura de matemáticas: escalas, coordenadas de puntos, componentes de vectores y módulos o distancias. Los aspectos básicos a recordar son los siguientes:

1. Escalas y factores de escala.

Los planos y mapas no son sino modelos de la realidad con proporciones más accesibles a nuestro manejo y estudio. Para establecer la relación de longitudes, distancias etc entre la realidad y la representación se habla de *escala*. El parámetro más importante asociado a la escala es el *factor de escala*, que nos señala por qué número hemos de multiplicar las distancias del plano para que coincidan con las reales. Ese factor será tanto más grande cuanto mayor sea la disparidad entre las dimensiones naturales y las modelizadas. Se trata de un factor *lineal*, es decir, sólo directamente aplicable para trasladar longitudes y no superficies o volúmenes. Si queremos comparar áreas, el número a usar es el factor de escala *al cuadrado*.

2. Sistema de coordenadas. Puntos en el plano.

Dado que un mapa es bidimensional, escogemos un punto de referencia u origen y dos ejes perpendiculares, X e Y, que nos caracterizan un plano. El origen se toma como el (0,0) de tal modo que todo punto del plano se puede referir a él mediante coordenadas. Estas coordenadas pueden ser cartesianas o polares: las primeras (x, y) representan las distancias del punto en cuestión, siguiendo la dirección del eje correspondiente, al otro eje perpendicular; las segundas (r, φ) , representan, respectivamente, la distancia del punto al origen y el ángulo descrito por la línea que une esos dos puntos y el eje horizontal X.

3. Vectores y sus componentes.

Un vector $\vec{u}(u_1, u_2)$ es básicamente un segmento con dirección y sentido que se representa por una flecha. Esta flecha tiene un punto como origen y otro como extremo. La línea que los une indica la dirección y la punta de la flecha determina el sentido. Formalmente, todo vector tiene los siguientes elementos:

- ❑ Origen o punto de aplicación: punto de partida del vector.
- ❑ Dirección: la descrita por la línea que une origen y extremo.
- ❑ Sentido: de los dos posibles, el indicado por la punta de la flecha.
- ❑ Módulo: la longitud del vector.

Dados dos puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ con A origen, conviene recordar que el vector correspondiente \vec{AB} será $\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y que su módulo viene dado por $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Cada una de las entradas del vector se llaman *componentes*.

Las componentes de un vector también pueden darse en coordenadas polares, pero es farragoso y completamente fuera de nuestros objetivos. Referidas a coordenadas cartesianas, la primera componente del vector tiene que ver con X y la segunda con Y, de tal modo que en general escribiremos un vector como $\vec{u}(u_x, u_y)$.

Los vectores pueden, entre otras operaciones, sumarse y restarse tanto geométrica como analíticamente. Según este último punto de vista, debemos recordar también que dados dos vectores $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$, su suma $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y su resta $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$.

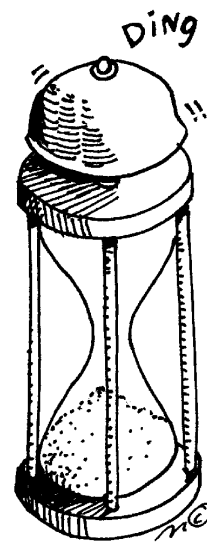
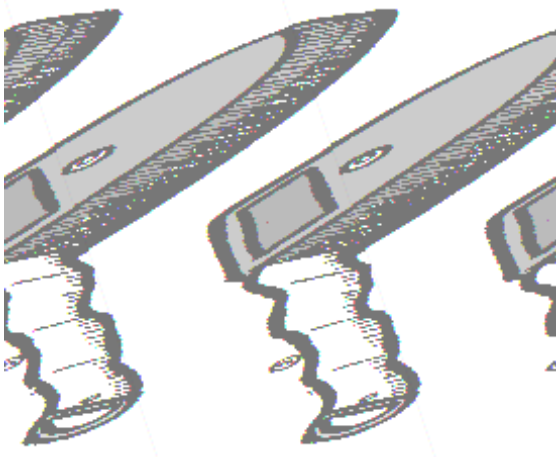
Tratamiento práctico.

Los alumnos se dispondrán en parejas con los planos de Huesca encima de la mesa. A partir de ese momento, y con los materiales citados anteriormente, realizarán las siguientes actividades:

1. Se establecerán las coordenadas de distintos puntos que señalará el profesor, en cartesianas y en polares y se escribirán con notación matemática. Los grados se expresarán en radianes.
2. Se determinarán con las reglas las distancias entre varios puntos y a partir de ellas las distancias reales haciendo uso del factor de escala. Se hará lo propio con una superficie sencilla, como un cuadrado o un rectángulo.
3. Se señalarán varios lugares y se construirán los vectores correspondientes. Trazando paralelas a los ejes con escuadra, cartabón y/o regla se hallarán las componentes. Luego se calcularán los módulos de los vectores considerados y se identificarán con las distancias entre los lugares implicados.
4. Haciendo uso de los vectores anteriores y añadiendo otros puntos y vectores si fuera necesario se comprobará que el vector suma tiene como componentes la suma de las componentes de sus vectores sumandos. Análogo con la resta.

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Rally matemático



UNIDAD DIDÁCTICA 5.

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS (*rally matemático*): Cálculo. Álgebra. Geometría.

Contenidos asociados

- Resolución de problemas
- Matemáticas del entorno cotidiano

Secuenciación

Tres sesiones: una para explicar, preparar y comenzar el rally, otra para continuar y acabar la simulación práctica y la última para la resolución de los problemas.

Materiales y recursos

Los habituales en un rally matemático: todos menos libros de matemática recreativa y (por supuesto) móviles..

Tratamiento de la actividad

Esta unidad didáctica se desarrollará de forma diferente a las otras. Primero el profesor explicará en qué consiste la dinámica del rally, con lo que se puede y no se puede hacer y el método que aconseja la organización. También les expondrá la motivación del rally así como de la propia actividad del taller, explicándoles la conveniencia, incluso necesidad, de aunar y consensuar esfuerzos y opiniones en equipo no sólo por camaradería y amistad sino porque la sociedad y el mercado laboral así lo demandan. Se les insistirá en que realizan la experiencia como clase y que se trata de lograr los mejores resultados del colectivo más allá de protagonismos individuales; dado que dispondrán de material de consulta y que no se trata de un examen donde haya que saberse las cosas de memoria, se recalcará el eventual error de infravalorar a quien saca peores notas en esta o en otras asignaturas numéricas.

Una vez colocados en grupos de dos o tres, como suele ser habitual en el Rally, se les repartirá a cada grupo una hoja con diez problemas, extraídos de pruebas reales de años anteriores. Se distribuirán los ejercicios como el profesor y ellos mismos han discutido y decidido y dispondrán de dos clases para resolver todos los que puedan. Dado que en la realidad es una prueba de “encierro” y tiempo limitado, los alumnos deberán devolver las hojas y sus cálculos tras la primera sesión para serles devueltas en la segunda. El profesor no deberá proporcionarles ayudas sustanciales pero, como sólo se trata de una simulación y tiene también objetivos didácticos, podrá guiar a los grupos en momentos puntuales.



La motivación y participación (aunque no activa directamente) del profesor serán fundamentales.

Relación de problemas.

De entre las pruebas realizadas desde el año 2000 hasta el 2003 se han escogido problemas adecuados para el nivel de cuarto ESO independientemente de la opción. Son un total de diez problemas con sus correspondientes dibujos y figuras, cuyos enunciados figuran en las próximas páginas y serán fotocopiados para los alumnos.

RALLY MATEMÁTICO SIN FRONTERAS 200?

**DISTRITOS de TOULOUSE, de ROUEN et de l'Île de LA REUNIÓN
ANDORRE, BÉLGIQUE, et MAROC
y las Comunidades de
ARAGÓN, CATALUÑA, GALICIA y MURCIA**



PRUEBA

PROBLEMAS DE RALLY MATEMÁTICO

PROBLEMA 1: Los cercados de Lucky Luke

Lucky Luke ha metido ocho caballos en cada uno de estos nueve cercados. Tras dejarlos que se muevan libremente por ellos, se observa en un momento dado que en el nº 3 hay once caballos y en el nº 2 no hay ninguno.

¿Cuántos caballos ha de haber en cada cercado para que las sumas horizontales, verticales y diagonales sean idénticas?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

PROBLEMA 2: La vitrina

Claudia tiene una vitrina con la forma de un paralelepípedo rectángulo (como una caja de zapatos). Los centros de las caras que tienen un vértice común forman un triángulo cuyos lados miden 16 cm, 20 cm y 24 cm.

¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Cuántos litros de agua necesitaría si quisiese llenarla?

PROBLEMA 3: Una buena medida

Dos números son tales que :

- si se suma la cuarta parte del primero a la mitad del segundo, se obtiene un cuarto de 37,
- si se resta el segundo del doble del primero, se obtiene un quinto de 45,
- estos dos números dan la posición, en el alfabeto, de dos letras de una abreviatura.

¿Cuál es la abreviatura?

PROBLEMA 4: Una pirámide apetitosa

Un trozo de chocolate tiene la forma de una pirámide de base cuadrada. El lado de la base mide 1cm y la altura de la pirámide 10cm. Se quiere cortar en dos partes con un plano paralelo a la base, de forma que ambas tengan el mismo volumen. Llamemos **A** al punto de intersección del plano de corte con la recta [**SH**], donde **S** es el vértice y **SH** la altura.

Calcular SA.

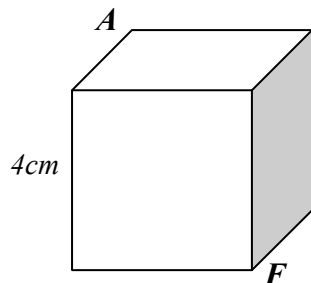
PROBLEMA 5: La requetemillonésima

La escritura decimal del número $\frac{1000^{2000}}{2000}$ tiene un gran número de cifras.

¿Cuántas cifras tiene ese número ?

PROBLEMA 6: El camino de la pulga

Una pulga aventurera se encuentra en el vértice A de un cubo de cristal como el de la figura. Si su velocidad, supuesta constante, es de 6 mm/s calcula, de entre todos los caminos posibles, el tiempo que le costará llegar por el más corto al vértice F.

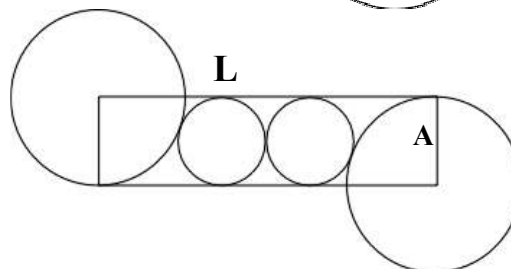
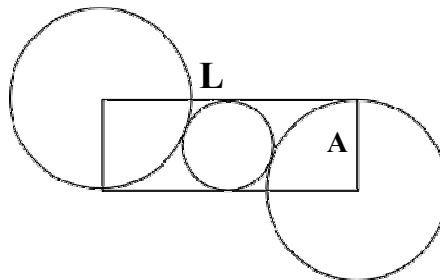


PROBLEMA 7: Rectángulos y Círculos

Sea **L** la longitud del rectángulo y **A** su anchura.

¿Cuál es el valor exacto de la relación $\frac{L}{A}$?

Encontrar la misma relación para esta otra figura



PROBLEMA 8: El «Heraldo» a punto de salir a la calle

El papel destinado a la impresión del periódico «El Heraldo» está enrollado alrededor de un eje cilíndrico de 20 cm. de diámetro. Una bobina entera de papel es un cilindro de 2m. de diámetro.

Sabiendo que el grosor del papel es de 0,1mm, *¿cuál es la longitud del papel enrollado en la bobina?*

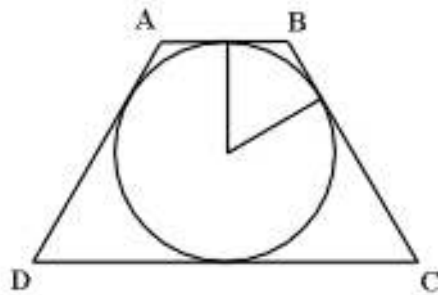
PROBLEMA 9: El túnel

Se excava un túnel rectilíneo entre Paris y Niza. Suponiendo la tierra esférica, este túnel se adentra en la tierra alcanzando la profundidad máxima a medio camino entre Paris y Niza... más o menos en Macón.

Sabiendo que la longitud del túnel entre Paris y Niza es de 720 km, que el radio terrestre es de 6400 km, *¿a qué profundidad del suelo se encuentra el túnel en su punto medio?*

PROBLEMA 10: Contacto a las 2.

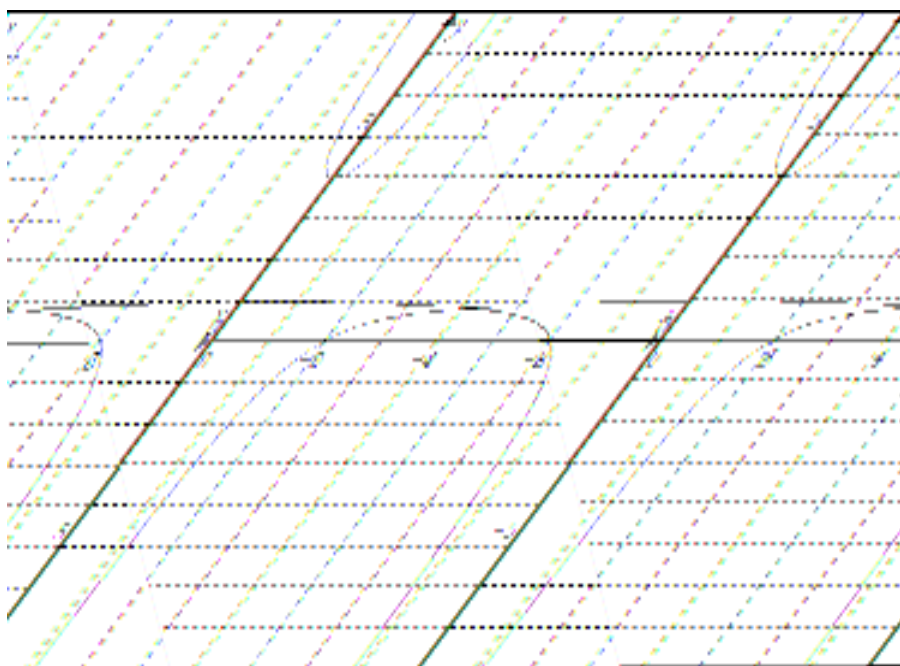
La carcasa de un reloj de pared antiguo, tiene forma de un trapecio isósceles **ABCD** en el cual está inscrita la esfera del reloj de 6cm de radio. Observamos que cuando las agujas marcan las 2h entonces apuntan hacia los puntos de tangencia entre la circunferencia y el trapecio.



¿Cuánto miden las bases [AB] y [CD]?

UNIDAD DIDÁCTICA 6

Gráficas de funciones



UNIDAD DIDÁCTICA 6.

FUNCIÓNES: Representación. Dominio, recorrido, simetrías...

Contenidos asociados

- Modelos matemáticos
- Formas y tamaños

Secuenciación

Dos sesiones en la sala de informática en las que se alternará teoría y práctica.

Materiales y recursos

Se precisará la sala de informática y el programa *Graphmatica*. Los alumnos se situarán por parejas en los ordenadores.

Tratamiento teórico.

Al contrario que la probabilidad, las funciones (correspondencias entre conjuntos de valores tales que a un elemento del conjunto de partida le corresponde uno o ninguno del conjunto final) son aplicaciones deterministas. Una vez dada la relación entre la variable independiente x y la dependiente y , para cada valor de aquella existirá uno de ésta perfectamente determinado. En la función $y = 2 - x$ al punto $x = -1$ le corresponde el valor $y = 3$ y ningún otro.

La representación de funciones nos proporciona gran cantidad de información a cerca de cómo se comportan las aplicaciones. Por medio de las gráficas, vemos rápidamente dónde y dónde no están definidas las funciones, dónde existen posibles discontinuidades, qué valores alcanza y cuáles no, dónde corta a los ejes... Por ello, es útil conocer al menos un programa sencillo que nos genere gráficas a partir de la expresión matemática y con el que podamos experimentar variando los parámetros que deseemos en una misma familia de funciones o escoger otros tipos de funciones. El programa que aprenderemos a utilizar se llama *Graphmatica*.

1. Graphmatica como programa.

Graphmatica es un programa muy sencillo de utilizar; se trata de una pequeña ampliación de la herramienta que poseen algunas calculadoras especiales, las llamadas gráficas. Aventura a éstas en que es mucho más claro, tiene más utilidades y es más versátil.

La forma básica de usarlo no puede ser más simple: se introduce la expresión matemática de la función y pulsando *enter* se genera la gráfica. Sin embargo, hay funciones que no se escriben como lo hacemos normalmente (raíces cuadradas, exponenciales, etc) y serán indicadas por el profesor (p. ej \sqrt{x} para raíz cuadrada de x o $\exp(x)$ para e^x). También habrá que tener cuidado con el uso de los paréntesis y las potencias (x^2 se escribirá x^2 , etc.) y otros aspectos similares.

Graphmatica permite también definir funciones a trozos, lo que puede aclarar ese concepto y resultar muy instructivo para los alumnos. También ofrece opciones de derivación e integración, pero en principio quedan fuera de los objetivos del curso.

Sí resulta interesante conocer y explotar las posibilidades de cambio de escala, de rango y de tipo de coordenadas (cartesianas, polares, "trigonométricas"), sobre las que se hará énfasis.

2. Elementos fundamentales del estudio de funciones.

Con objeto de experimentar con el programa de modo fructífero y que éste no se quede en un mero productor de curvas y líneas sin sentido ni control, el alumno debe tener muy claro el significado de estos conceptos:

- *Dominio*: conjunto de valores de x para los que existe imagen y , es decir, el conjunto de valores de x para los que la función existe o está definida. Ejemplo: el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que podemos evaluar sin ningún problema la función en cualquier x a excepción de $x = 0$, donde no existe porque no tiene sentido dividir algo por cero.
- *Recorrido*: Conjunto de valores de y que alcanza la función, es decir, es el conjunto de valores imagen que tiene la gráfica. Ejemplo: la función $g(x) = \sqrt{x}$ tiene como recorrido $[0, +\infty)$ porque en su dominio la raíz de cualquier número (su imagen por $g(x)$) será positiva o nula.
- *Cortes con los ejes*: En una función es posible que a algún x le corresponda una imagen $y = 0$ o a algún y la antiimagen $x = 0$. Estos casos corresponden, respectivamente, a cortes con el eje X y cortes con el eje Y. Ejemplo: la función $h(x) = 2^x - 4$ tiene un corte con el eje X en el punto (2,0) y uno con el eje Y en el (0,-4).
- *Simetrías*: En una función pueden observarse en ocasiones regularidades importantes, como que una parte de la gráfica sea imagen especular de la otra llevando o sin llevar a cabo ciertas “manipulaciones” previas. Las simetrías más interesantes son respecto al eje Y (función par), en la que se cumple $f(x) = f(-x)$ y la impar, que cumple $f(-x) = -f(x)$. Ejemplo: $g(x) = 2x$ impar, $h(x) = x^4$ par.
- *Monotonía, continuidad y límites*: Dado que alumnos de diferente opción estarán mezclados, se hablará de estos conceptos con cierta generalidad pero sin perder rigor. Se estudiarán intervalos de crecimiento y decrecimiento, se buscarán formas de discontinuidad y se tratará el concepto de límite de acuerdo a diferentes niveles.

Tratamiento práctico.

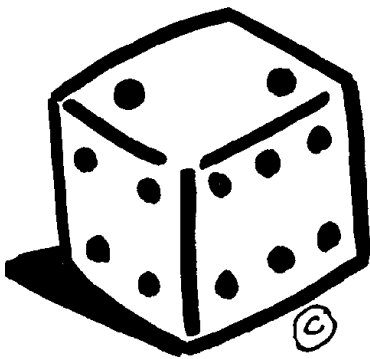
Los alumnos se dispondrán en grupos frente a los ordenadores, preferentemente por parejas. Antes de lanzarse a escribir cualquier expresión en el programa, deberán discutir cuál es la forma correcta de hacerlo y si existen varias posibilidades. El profesor les guiará a través del programa haciéndoles seguir los siguientes pasos:

1. Una vez que el profesor ha explicado las nociones básicas, los alumnos inventarán una serie de funciones, que escribirán en el cuaderno, y las introducirán en el programa. Internamente en cada grupo y luego con el profesor comentarán las dificultades encontradas y la concordancia entre la gráfica obtenida y la que pudieran esperar.
2. Los alumnos pensarán en expresiones de funciones que cumplan determinadas características: sean pares, tengan dominio sólo en los negativos, un determinado recorrido, discontinua en un punto, etc... y las introducirán en el programa; luego comentarán los resultados entre ellos y con el profesor en base a lo obtenido y lo esperado.
3. Subrayando la necesidad en muchas funciones de cambiar de escala (p. ej. la función $f(x) = \frac{1}{x-7}$ tiene evidentemente una discontinuidad infinita en $x = 7$ que puede no verse si la escala no es la adecuada) se invitará a los alumnos a que prueben distintas escalas y busquen las más ajustadas a cada función
4. Estableciendo la conveniencia de medir en radianes, los alumnos practicarán con las *unidades en pi* permitidas por el programa. Llamándoles la atención sobre las etiquetas (nombres de los ejes, leyendas, etc...) ofreciéndoles el ejemplo de las coordenadas polares (r, θ) , practicarán eligiendo nuevos nombres adaptados a cada situación (p. ej. en física con dependencias $v(t)$ o $x(t)$).

5. Se explicará a los alumnos cómo obtener las gráficas de las funciones definidas a trozos y se les dejará que practiquen. Se les insistirá en que pongan especial cuidado en los dominios utilizados.
6. *Opcional:* se podrá iniciar a los alumnos que lo soliciten y si hay tiempo en la función derivada desde un punto de vista gráfica, limitándonos al hecho de que no todas las funciones son derivables en todos sus puntos (se puede trabajar con funciones suaves, que tendrán derivada y funciones con picos, como el valor absoluto).

UNIDAD DIDÁCTICA 7

Probabilidad



UNIDAD DIDÁCTICA 7.

PROBABILIDAD: Probabilidad vs Estadística. Sucesos dependientes e independientes.

Contenidos asociados

- Matemáticas del entorno cotidiano
- Juegos lógicos y de estrategia
- Modelos matemáticos

Secuenciación

Dos sesiones en las que se alternará teoría y práctica.

Materiales y recursos

Los alumnos harán grupos de dos o tres. Se necesitarán calculadoras, barajas, monedas y al menos dos dados de seis por grupo.

Tratamiento teórico.

Muchas veces un proceso no es determinista, es decir, dadas una ciertas condiciones de partida no podemos esperar un resultado único y exclusivo. Evaluar una función en un punto es determinista (si $f(x) = 2x + 1$, $f(2)$ es forzosamente igual a 5), mientras que tirar un dado no, ya que dispone de seis resultados posibles. Para los procesos no deterministas, esto es, *aleatorios*, existe una rama de las matemáticas llamada *probabilidad*.

1. Probabilidad y estadística.

Pese a que en la probabilidad interviene directamente el azar, eso no significa que no exista un tratamiento teórico del que podamos extraer conclusiones prácticas. En este sentido, la probabilidad podría verse como un análisis estadístico en el que se trabajase con un número infinito de datos.

Consideremos un ejemplo muy sencillo. Está claro que si lanzamos una moneda en condiciones normales debemos esperar dos resultados posibles: cara o cruz. Estos resultados no pueden darse al mismo tiempo y la experiencia debe arrojar ineludiblemente uno de los dos valores. Si nos preguntásemos por las posibilidades de obtener cara o cruz, cualquier persona con un mínimo de lógica diría que serían de un 50%, o una de cada dos, o algo parecido. Sin embargo, eso no impide que tiremos la moneda cinco veces y las cinco nos salgan cara. Este resultado es, matemáticamente hablando, menos probable que casi cualquier otro, pero es posible. Una valoración estadística recogería los datos simplemente como un resultado de cara con frecuencia seis. ¿Dónde está entonces el nexo entre estadística y probabilidad? La respuesta reside en lanzar la moneda un número muy grande de veces. Cuanto mayor sea ese número, mayor será la concordancia entre estadística y probabilidad, de modo que si tiramos cien veces la practica se parecerá más a la teoría (p. ej. se obtendrán 54 caras y 46 cruces \rightarrow 54%, 46%) y mucho más si son mil las tiradas (p. ej. 508 caras y 492 cruces \rightarrow 50.8%, 49.2%).

2. Elementos fundamentales de la probabilidad.

A cada uno de los resultados posibles en una experiencia aleatoria se llama *suceso*. Estos sucesos pueden ser simples, como sacar un cinco en un dado, o más complejos, como sacar par o múltiplo de tres. Los sucesos individuales, y por tanto más simples, que pueden obtenerse se llaman *sucesos elementales*. Se habla también de suceso seguro, E , cuando no hay ninguna restricción sobre la experiencia (p. ej. sacar de uno a seis, o menos de ocho, en 1d6) y de suceso imposible, ϕ , cuando jamás puede obtenerse (p. ej. sacar un nueve con el dado).

He aquí varios sucesos posibles en el lanzamiento de un dado: $\{1\}$, $\{3,5\}$, $\{\text{mayor que } 4\}$, E , $\{\text{impar}\}$, ϕ . El conjunto de sucesos elementales posibles se llama *espacio de sucesos*, E , y equivale a $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

La probabilidad matemática de un suceso no se mide en tantos por cien, sino que es siempre un número que está comprendido entre 0 y 1, de tal modo que para un suceso A se tiene que $0 \leq P(A) \leq 1$. Como ha podido observarse, los sucesos son en general conjuntos de elementos, y por tanto podrá considerar su unión, $A \cup B$, su intersección, $A \cap B$, su sustracción $A - B$ o su contrario o complementario \bar{A} , \bar{B} , etc.

3. Cálculos simples. La ley de Laplace.

Para realizar cálculos probabilísticos simples se acude a la ley de Laplace, sólo aplicable cuando las posibilidades de los distintos sucesos elementales están equiparadas (esto es, cuando no utilizamos monedas, ruletas o monedas trucadas). Su expresión es muy simple:

Para un suceso A en una experiencia aleatoria “limpia” se tendrá que:

$$P(A) = \frac{n^\circ \text{ casos favorables al suceso } A}{n^\circ \text{ casos posibles}}$$

Apliquemos como ejemplo la ley de Laplace a una baraja española, considerando los siguientes sucesos: $A = \{\text{siete de oros}\}$, $B = \{\text{cualquiera}\}$, $C = \{\text{figura}\}$, $D = \{\text{tres de diamantes}\}$, $F = \{\text{as}\}$.

Para esos sucesos tendremos:

$$P(A) = \frac{1}{40}, \quad P(B) = \frac{40}{40} = 1, \quad P(C) = \frac{12}{40} = 0.3, \quad P(D) = \frac{0}{40} = 0, \quad P(F) = \frac{4}{40} = 0.1$$

donde uno puede ver que $B = E$ (suceso seguro) y $D = \phi$ (suceso imposible).

4. Sucesos compatibles e incompatibles. Sucesos dependientes e independientes.

Resulta de gran importancia a la hora de calcular probabilidades tener muy claros los siguientes conceptos:

- Dos sucesos A , B son *incompatibles* si $A \cap B = \phi$. De otro modo son *compatibles*. Ejemplo: $\{1\}$ o $\{\text{par}\}$ son sucesos incompatibles, mientras que $\{\text{impar}\}$ o $\{\text{múltiplo de tres}\}$ son compatibles (tienen el $\{3\}$ en común).

- Dos sucesos A , B son *independientes* si al realizarse secuencialmente uno no influye en el otro y *dependientes* al contrario.

Ejemplo: Si tiramos una moneda dos veces, $\{\text{cara en la } 1^\text{a} \text{ tirada}\}$ y $\{\text{cruz en la } 2^\text{a}\}$ son independientes porque no se condicionan mutuamente. En cambio, si tenemos en una vitrina opaca tres bolas negras y dos blancas, la probabilidad de que saquemos blanca en la segunda extracción dependerá de lo que hayamos sacado en la primera.

Si dos sucesos son independientes, sus probabilidades se multiplican sin más, de modo que si me pregunto por la probabilidad de sacar un tres y un cuatro en dos tiradas

sucesivas de dado, tendremos que $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Tratamiento práctico.

Nos dispondremos en grupos, cada uno de los cuales se encargará de realizar tiradas de dados, lanzamiento de monedas o extracción de cartas, para posteriormente sacar conclusiones matemáticas con los datos obtenidos y recogidos en sus cuadernos.

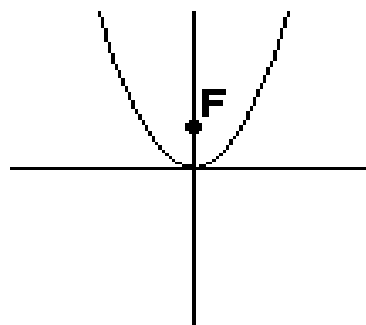
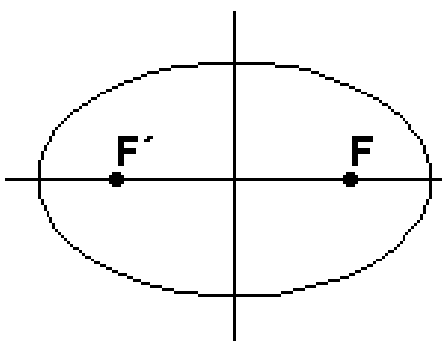
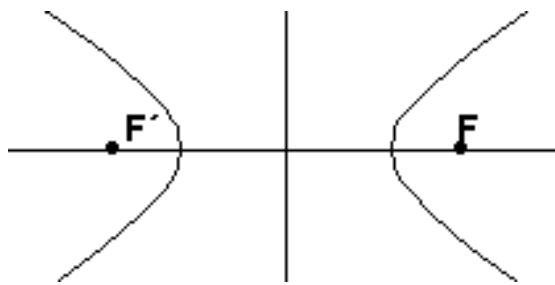
6. Cada grupo lanzará un dado una cierta cantidad de veces a concretar, de tal modo que entre todos se realicen más de 200 tiradas (si ese número es múltiplo de 6, todavía mejor). Se anotarán todos los resultados y se comprobará, con la calculadora, que utilizando la estadística nos acercamos a los datos teóricos predichos por la probabilidad, de tal modo que habremos sacado un 1, 2,..., 6 una sexta parte de las veces aproximadamente.
7. Nos centraremos ahora en tiradas de dos dados. Se dejará cierto tiempo para que los grupos piensen y comprueben mediante tiradas que ahora todas las puntuaciones no son igualmente probables. Se les preguntará por cuáles tienen mayor o menor probabilidad, para hacerles llegar a concluir que, p. ej, un resultado de 8 es mucho más probable que uno de 3. Con la ley de Laplace se les invita a que hallen las probabilidades de cada resultado y que lo reflejen en una tabla.
8. Hacemos a continuación uso de la baraja española para preguntarnos por probabilidades y familiarizarnos más con la Ley de Laplace. Nos preguntamos por sucesos elementales, compuestos, intersecciones, uniones, complementarios, etc (p. ej. P(par), P(valor superior a 6), P(bastos)...). Cada grupo deberá reflexionar acerca de cada caso y escribir los resultados en su cuaderno.
9. Con la misma baraja, se les anima a que busquen sucesos compatibles e incompatibles y que los anoten. Se discutirá por qué lo son o no. Luego pensarán sobre dos experiencias que sean independientes y otras dos dependientes, llamándoles la atención sobre el factor o factores que las hacen tan distintas *P* ej. sacar una figura *F* en la segunda extracción tras haber metido la primera carta otra vez en el mazo es una experiencia de carácter independiente: $P(F^{2^a}) = \frac{12}{40}$, pero hacer lo mismo sin volver a meterla nuevamente es dependiente, ya que en tal caso las probabilidades son diferentes si la primera vez se saca una figura, con lo que $P(F^{2^a} / F^{1^a}) = \frac{11}{39}$, o se saca otra cosa, en cuyo caso tenemos $P(F^{2^a} / \bar{F}^{1^a}) = \frac{12}{39}$.
10. Cada grupo buscará y anotará sucesos dependientes e independientes en la realidad cotidiana y hará una pequeña lista con sus correspondientes probabilidades.

Ejemplo:

<i>Experiencias independientes</i>	<i>Experiencias dependientes</i>
Sacar C, C, +, en tres tiradas de moneda	Sacar dos bolas negras en una vitrina con tres negras y seis blancas
Sacar dos treses negros en dos jugadas de ruleta	Disparar dos balas de fogueo y una real con un cargador que tiene dos reales y seis de fogueo
...	...

UNIDAD DIDÁCTICA 8

Cónicas



UNIDAD DIDÁCTICA 8.

CÓNICAS: Construcción, elementos básicos y expresión matemática.

Contenidos asociados

- Formas y tamaños
- Modelos matemáticos

Secuenciación

Dos sesiones en la sala de informática en las que se alternará teoría y práctica.

Materiales y recursos

Se precisará la sala de informática y el programa *Descartes* con varios applet y/o *Internet*. Los alumnos se situarán por parejas en los ordenadores.

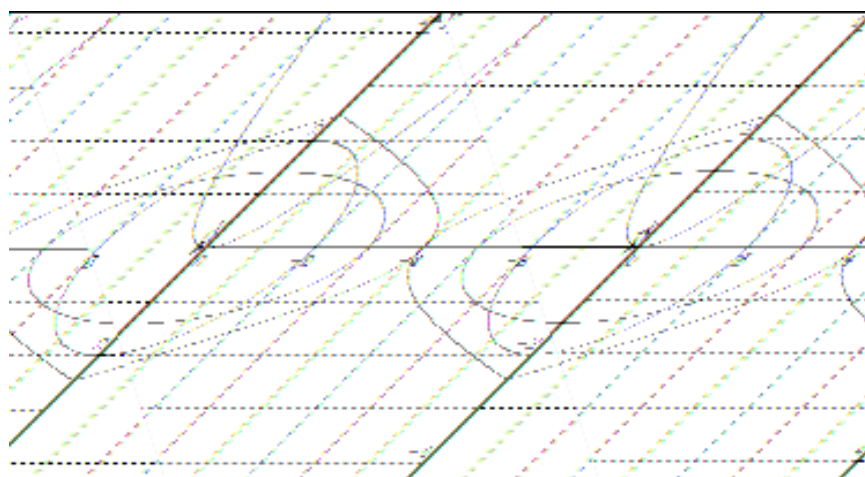
Tratamiento teórico.

Las cónicas, en general, no son funciones; de hecho, sólo la parábola lo es. Sin embargo, son formas que aparecen con tanta frecuencia en ciertas disciplinas (bellas artes, física, ingeniería, arquitectura...) que merece la pena descubrir sus regularidades, cómo se construyen y cuáles son sus elementos básicos.

1. Las cónicas

Las cónicas son los lugares geométricos de los puntos que cumplen una determinada propiedad, que resulta específica y exclusiva de cada una de ellas. A nivel de la ESO, nos conformaremos con familiarizarnos con las curvas planas, aunque la variedad de cónicas en tres dimensiones (espaciales) es, evidentemente, mucho más rica: *esferas, elipsoides, paraboloides...* En dos dimensiones, las cónicas más relevantes son las siguientes:

- ❑ *Circunferencia:* lugar geométrico de los puntos que equidistan de un dado llamado centro. Sus elementos principales son radio, arco, cuerda, etc... En realidad es un caso particular de la cónica que se indica a continuación.
- ❑ *Elipse:* lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos llamados focos es constante. Sus elementos principales son semiejes, excentricidad...
- ❑ *Hipérbola:* lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos llamados focos es constante. Los elementos principales son ramas, vértices...
- ❑ *Parábola:* lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y un eje llamado recta directriz. Sus elementos principales son vértice, radio vector...



2. Los *applets*: herramienta educativa

Para estudiar las cónicas, nos serviremos de una de las herramientas más útiles y fáciles de manejar que proporciona la matemática interactiva por ordenador: el *applet*. Un *applet* es un programa que puede incluirse en una página *web*. Si este *applet* es lo que se denomina *configurable*, resulta de gran valor al poder generarse con él subprogramas (*applets* más concretos) que se implementan en base a las posibilidades y estructuras de ese programa raíz. Casi en todos los casos se trata de simulaciones que permiten asimilar de manera gráfica e interactiva ciertos modelos científicos o de cualquier otro tipo. Son de uso ameno y no precisan gran explicación previa, pero la guía por parte del profesor resulta muy conveniente para el total y adecuado aprovechamiento de la simulación.

En nuestro caso utilizaremos un *applet* configurable muy conocido en matemáticas y muy extendido en la Red como es *Descartes*. A partir de este programa raíz se han desarrollado gran cantidad de pequeños *applets* de gran interés educativo en diversos niveles, algunos de los cuales –los referentes a cónicas– vamos a descubrir en esta actividad. Encontraremos un índice de los *applets* de matemáticas en la página <http://descartes.cnice.mecd.es>.

3. Las simulaciones de cónicas en Descartes.

El mayor poder del programa Descartes reside en poder generar con él prácticamente cualquier gráfica (cosa que también pueden hacer aplicaciones como *Graphmatica*) pero, además, con la ventaja –sobre todo educativa– de convertirla en interactiva sin más que definir una serie de parámetros, especificar sus rangos de variación y establecer las relaciones adecuadas entre ellos. Esto corre a cargo del autor del *applet*, que es el que directamente trata con Descartes, y por tanto permanece “invisible” para el usuario-alumno, que no tiene más que variar con lógica los valores de cada parámetro, bajo supervisión del propio texto del *applet* y del profesor, para ir obteniendo resultados interesantes.



Tratamiento práctico.


Los alumnos se dispondrán por parejas frente a los ordenadores. En este caso, el índice de actividades vendrá dado por cada *applet*, las cuales habrán sido realizadas y valoradas previamente por el profesor. Cada *applet* dispone de una serie de tareas descritas por pasos para guiar al alumno a través de las posibilidades de interactividad de la simulación; la labor del profesor será supervisar la correcta ejecución dichos pasos por parte de cada grupo, complementar las enseñanzas del *applet* con las suyas propias –teniendo muy presente la vinculación de esta asignatura con la propia de matemáticas– y resolver las dudas que puedan plantearse en cada momento. Se utilizarán tres *applets*:


- ❑ *Las cónicas*. Es un *applet* que da una visión general de las cónicas planas más representativas (detalladas arriba) insistiendo sobre todo en la propiedad fundamental que las define y en sus elementos característicos.
- ❑ *La hipérbola*. Profundiza en la hipérbola relacionándola con la proporcionalidad inversa y considera traslaciones horizontales y verticales.
- ❑ *La parábola*. Profundiza en la parábola y en su expresión algebraica, insistiendo en sus traslaciones y anchuras.


El alumno realizará todos aquellos dibujos complementarios que necesite o reclame el propio *applet* en su cuaderno.


UNIDAD DIDÁCTICA 9

Tests psicotécnicos

1.  **A** **B** **C** **D** **E** **F**

2. 

3. 

4. 

UNIDAD DIDÁCTICA 9.

TEST PSICOTÉCNICOS: Series numéricas y gráficas. Lógica espacial.

Contenidos asociados

- Juegos lógicos y de estrategia
- Formas y tamaños

Secuenciación

Una única sesión extensible a dos si la discusión de soluciones se prolongara.

Materiales y recursos

Los alumnos se situarán por parejas. Sólo podrán utilizar lápiz y papel para sus dibujos. No podrán usar calculadora.

Tratamiento de la actividad.

Siguiendo la línea de la unidad didáctica de lógica de esta misma asignatura, esta actividad tampoco tiene una parte teórica “al uso” que enseñar a los alumnos, sino más bien un enunciado de las principales características de un tipo de prueba muy popular profesionalmente que casi con toda seguridad ya conocen, como son los *tests psicotécnicos*, y una pequeña relación de consejos a la hora de enfrentarlos.

Se les entregarán unas hojas con secuencias cortas (la mayoría gráficas) que deberán completar eligiendo una -o varias, según el caso- de las opciones posibles para cada una de ellas. Esta vez contarán con un tiempo límite de veinte minutos para terminar, aunque la actividad no se planteará como una competición, sino como el proceso de adaptación a un pequeño reto donde se valora la relación rapidez/eficacia. Dada la sensación de incomodidad y/o indefensión que provoca esta clase de pruebas a cierto sector del alumnado cuando han de realizarlas en solitario, se prefiere respetar la disposición de los chicos por parejas y la discusión conjunta, dando prioridad nuevamente al aspecto didáctico de la actividad más que a la rivalidad y al lucimiento personal.


Los tests psicotécnicos. El test IQ.

Como seguramente habrá comentado la orientadora a los alumnos, los tests psicotécnicos son utilizados asiduamente por empresas y organismos oficiales como instrumentos de selección de personal. Son fundamentales en determinadas oposiciones como las correspondientes a policía nacional, guardia civil o controladores aéreos, por citar varios de los múltiples ejemplos. En el mundo empresarial se usan frecuentemente en preselecciones de programadores o consultores informáticos, personal de atención al público y administrativo.

Existen muchas variedades de tests: los hay puramente verbales, numéricos o gráficos. No obstante, se suele echar mano de pruebas que contengan un poco de todo para evaluar distintas capacidades y que puedan ofrecer una perspectiva más globalizadora de la persona a la que se examina. Como denominador común a todas ellas, se requiere del aspirante lógica, paciencia y claridad mental; frente a estos elementos, el tiempo, casi siempre limitado deliberadamente, obstaculizará el rendimiento creando ansiedad, inseguridad y estrés.

A simple modo de ejemplo, se incluye un ítem de cada tipo de test de los citados anteriormente:

- ❑ *Test numérico*. Completa la siguiente secuencia:

1, 3, 7, 13, ... 

- *Test verbal*: De esta familia de palabras, elige la que está fuera de lugar:

escriba, secretario, ordenanza, amanuense. 

- *Test gráfico*: Señala, de las seis posibilidades de la derecha, la que continúa la secuencia de la izquierda:



Por último, son muy conocidos los llamados tests de inteligencia o tests IQ, que pretenden evaluar el llamado cociente intelectual de un individuo. Suelen ser de tipo mixto, es decir, mezclando ítems de cualquiera de los formatos anteriores, que exploran diversas capacidades para llegar a una conclusión cuantitativa final. El que se presenta a los alumnos es un test IQ, aunque el profesor ignorará su finalidad real y se centrará en la meramente educativa.

Consejos.

Se deberá dar una serie de consejos sobre este tipo de pruebas a los alumnos, subrayando que muchos de ellos son comunes a otros métodos de evaluación como, por ejemplo, un examen académico. No obstante, sí que hay algunos que resultan más propios de los tests psicotécnicos. He aquí una pequeña lista de recomendaciones:

- Es imprescindible disponer de un reloj al que consultar el tiempo que se lleva y que resta de prueba, si bien no debe estar tan a la vista que cualquier mirada fuera del papel implique enfrentarse a la hora.
- Si se puede, se debe hacer una división aproximada del tiempo para cada prueba o secuencia, considerando su dificultad o su duración.
- Resulta fundamental conservar la calma y no desesperarse. Si algún ítem se resiste o presenta dudas es mejor dejarlo para el final.
- La mente debe estar despejada; paralelamente, antes de empezar uno tiene que estar dispuesto a abrirse a un mayor número de posibilidades y alternativas que las meramente aparentes.
- Ha de preservarse la confianza en uno mismo y ser consciente de las propias limitaciones, sin que esto haga rechazar un determinado “obstáculo” por parecer demasiado alto. Si este lo es o no, habrá de comprobarse después, y nunca antes, de haber intentado superarlo varias veces.
- Es recomendable usar todos los medios disponibles aunque parezcan banales. Lápiz y papel pueden ordenar las ideas que la mente insiste en mezclar.

Estos y otros consejos no aseguran una buena puntuación en un test, pero ayudan a que el rendimiento se acerque más al que se obtendría sin presión.

El test para los alumnos.

De acuerdo con los objetivos del taller de matemáticas y los de esta unidad en particular, se ha elegido un IQ gráfico casi en su totalidad, con 33 ítems de dificultad variable para cuya resolución los alumnos dispondrán de veinte minutos. Pese a que el test está concebido como individual, se llevará a cabo por parejas por las razones aducidas anteriormente.