PROGRESIONES

DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NUMÉRICA

Una sucesión numérica es un conjunto limitado y ordenado de números reales.

TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN. TÉRMINO GENERAL DE UNA SUCESIÓN a_n

Cada elemento de ese conjunto que forma una sucesión numérica se llama *término de la sucesión*, denotándose así:

a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término, a_3 es el tercer término, …, etc.

El término general de una sucesión es la fórmula que permite calcular cualquier término de la sucesión conociendo su lugar. Se expresa así:

a_n, término general

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada *diferencia*, d, es decir:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

El *término general* de una sucesión aritmética viene dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d,$$

en donde a_1 es el primer término de la sucesión y d es la diferencia.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética se denota con S_n, y está dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad constante llamada *razón*, r, es decir:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

El *término general* de una sucesión geométrica viene dado por:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

en donde a_1 es el primer término de la sucesión y r es la razón.

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica se denota con S_n, y está dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Teniendo en cuenta $a_n = a_1 r^{n-1}$, la expresión de la suma se puede escribir también como sigue:

$$S_n = \frac{\left(a_1 r^{n-1}\right) \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$$

Caso en el que $|r| < 1$

Si el valor absoluto[1] de r es más pequeño que 1, y queremos hallar la suma de todos los términos de la progresión geométrica, la fórmula anterior se escribe del siguiente modo:

$$S_\infty = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} \approx \frac{-a_1}{r - 1} = \frac{a_1}{1 - r}$$

¿Por qué ha desaparecido $a_1 \cdot r^n$?

Estamos buscando la suma de infinitos términos. Ello quiere decir que n es infinito. Pues bien: *Cualquier número que esté comprendido entre 0 y 1 elevado a un exponente grande es, aproximadamente cero.*

Ejemplo de ello:

$$0{,}3^{20} = 0{,}000000003486784401 \approx 0$$

Esta bonito truco de eliminar ciertos términos en las fórmulas es el pan de cada día de los científicos e ingenieros que las manejan.

EJERCICIOS

1) Hallar los términos que se indican en las siguientes progresiones aritméticas:

[1] El valor absoluto de un número a, denotado como $|a|$ es ese número SIEMPRE con signo positivo. Ejemplos $|-4| = 4$. $|4| = 4$.

a) El trigésimo en 1,6,11,16,...
b) El decimosexto en 1,5,9,13,...
c) El vigesimocuarto en -8, -5, -2, 1, ...

Solución:

Está claro que no vamos a ponernos a desarrollar cada una de las progresiones hasta el término que nos piden. Lo que vamos a hacer es calcular el término general de cada una de ellas y luego, a partir del término general alcanzar nuestro objetivo.

Todas son progresiones aritméticas. Entonces, el término general está dado por:
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, con d tal que $d = a_n - a_{n+1}$. Así qué:

a) $d = 6-1 = 5$, por lo que $a_n = 1 + (n-1)\cdot 5 = 1 + 5n - 5 = 5n - 4$. Como nos piden el término trigésimo, entonces n = 30 y $a_{30} = 5\cdot 30 - 4 = 150 - 4 = 146$

b) $d = 5-1 = 4$, por lo que $a_n = 1 + (n-1)\cdot 4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$. Como nos piden el término decimosexto, entonces n = 16 y $a_{16} = 4\cdot 16 - 3 = 64 - 3 = 61$

c) $d = -5-(-8) = 3$, por lo que $a_n = -8 + (n-1)\cdot 3 = -8 + 3n - 3 = 3n - 11$. Como nos piden el término vigesimocuarto, entonces n = 24 y $a_{24} = 3\cdot 24 - 11 = 72 - 11 = 61$

2) Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:
a) De 25 en 3, 8, 13, ...
b) De 22 en 42, 39, 36, ...
c) De 40 en $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \ldots$

Solución:

Lo que hay que hacer es hallar el término general y luego aplicar la fórmula de la suma a cada una de las progresiones.

a) $d = 8-3 = 5$, por lo que $a_n = 3 + (n-1)\cdot 5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$. Como nos piden el término 25, entonces n = 25 y $a_{25} = 5\cdot 25 - 2 = 125 - 2 = 123$. Ahora introducimos la expresión que nos permite hallar la suma de la progresión y sustituimos datos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25})\cdot 25}{2} = \frac{(3+123)\cdot 25}{2} = 1575$$

b) $d = 39–42 = –3$, por lo que $a_n = 42 + (n – 1)\cdot (–3) = 42 – 3n + 3 = 45 – 3n$. Como nos piden el término vigésimo segundo, entonces $n = 22$ y $a_{22} = 45 - 3\cdot 22 = -21$. Sustituimos datos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_{22})\cdot 22}{2} = \frac{(42 - 21)\cdot 22}{2} = -231$$

c) $d = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5-4}{8} = \frac{1}{8}$, por lo que $a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{n}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4+n-1}{8} = \frac{3+n}{8}$.

Como nos piden el término 40, entonces $n = 40$ y $a_{40} = \frac{3+40}{8} = \frac{43}{8}$. La suma de los primeros 40 términos está dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_{40})\cdot 40}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{43}{8}\right)\cdot 22}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{43}{8}\right)\cdot 11 = \left(\frac{4+43}{8}\right)\cdot 11 = \frac{517}{8}$$

3) ¿Cuántos términos de la progresión 3, 1, –1, –3, –5,... se deben tomar para que la suma sea –140?

Solución:

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética está dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \quad (1)$$

Sustituyendo los datos conocidos llegamos a

$$-140 = \frac{(3 + a_n)\cdot n}{2} \quad (2)$$

Recordemos que estamos buscando el valor de *n*. Usando el enunciado nos es posible hallar el término general:

La diferencia es $d = –2$. Así:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 3 + (n-1)\cdot(-2) = 3 - 2n + 2 = 5 - 2n \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) escribimos:

$$-140 = \frac{(3 + (5-2n))\cdot n}{2} \Rightarrow -140 = \frac{(3+5-2n)\cdot n}{2} \Rightarrow -140 = \frac{(8-2n)\cdot n}{2} \Rightarrow \quad (5)$$

$$\Rightarrow -140 = 4n - n^2 \Rightarrow n^2 - 4n - 140 = 0 \qquad (6)$$

Resolvamos ahora la ecuación de 2º grado (6). Para ello hay que recordar la famosa expresión que nos permite resolver cualquier ecuación de grado 2:

$$an^2 + bn + c = 0 \Rightarrow n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (7)$$

En ese caso:

$$n^2 - 4n - 140 = 0 \Rightarrow n = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-140)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 560}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{576}}{2} =$$
$$\frac{4 \pm 24}{2} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 14 \\ n_2 = -10 \end{cases}$$

Pero n sólo tiene sentido si es positivo, por lo que $n_1 = 14$. Así que la respuesta que buscamos es 14. Tenemos que tomar 14 términos para que la suma de al progresión que nos ocupa sea –140.

Comprueba que, en efecto, la suma de los 14 primeros términos es –140.

4) Halla la suma de todos los números pares comprendidos entre 99 y 1001.

Solución:

Como siempre, emplearemos las dos expresiones propias de las progresiones aritméticas:

Expresión del término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ (1)

Expresión de la suma de los n primeros términos: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. (2)

Los números pares son 2, 4, 6,…, es decir, la diferencia entre ellos es d = 2. Por otro lado, el primer término, a_1, es 100 y el último, a_n, es 1000.

Entonces:

Para el término general:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow 1000 = 100 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow 900 = 2n - 2 \Rightarrow n = \frac{900 + 2}{2} = 451$$

Para la suma de los n = 451 primeros términos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{451} = \frac{(100+1000)\cdot 451}{2} \Rightarrow S_{451} = 248050$$

5) El primer término de una progresión aritmética es 3 y el último 39. Si la suma de todos los términos es 210, calcular la diferencia *d* y el número de términos *n*

Solución:

Las expresiones que tenemos que manejar son dos: *la del término general* y la de la *suma de los n primeros términos* dadas por $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ y $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$, respectivamente.

El primer término es $a_1=3$, el último $a_n=39$ y la suma $S_n=210$. Sustituyamos tales valores en la expresión de la suma de los n primeros términos:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow 210 = \frac{(3+39)\cdot n}{2} \Rightarrow 420 = 42n \Rightarrow n = 10$ .Tenemos pues una progresión de 10 términos.

Ahora llevemos ésto a la expresión del término general:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow 39 = 3 + (10-1)\cdot d \Rightarrow \frac{39-3}{9} = d \Rightarrow d = 4$. Así que la diferencia entre los términos es 4.

6) La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1287. calcúlalos.

Sean tres números en progresión aritmética dados por a_n, a_{n+1} y a_{n+2}. Cada uno de ellos tiene que cumplir lo siguiente:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = a_1 + nd - d \quad (1)$$

$$a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)\cdot d = a_1 + n\cdot d\,. \quad (2)$$

$$a_{n+2} = a_1 + (n+2-1)\cdot d = a_1 + (n+1)\cdot d = a_1 + nd + d\,. \quad (3)$$

Es más esclarecedor si escribimos cada uno de los términos en función de uno sólo, por ejemplo, del término central a_{n+1}. De este modo (1) y (3) toman la siguiente forma:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = (a_1 + nd) - d = a_{n+1} - d \quad (4)$$

$$a_{n+2} = a_1 + (n+2-1)\cdot d = a_1 + (n+1)\cdot d = (a_1 + nd) + d = a_{n+1} + d \qquad (5)$$

La suma de estos tres números es 33, es decir:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 33 \Rightarrow (a_{n+1} - d) + a_{n+1} + (a_{n+1} + d) = 33 \Rightarrow 3a_{n+1} = 33 \Rightarrow a_{n+1} = 11 \qquad (6)$$

Por otro lado, el producto de estos tres números es 1287, es decir:

$$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 1287\,. \qquad (7)$$

Recordando que $a_{n+1} = 11$ y usando (4) y (5) escribimos la siguiente igualdad:

$$(11-d)\cdot 11 \cdot (11+d) = 1287 \Rightarrow 11^2 - d^2 = \frac{1287}{11} \Rightarrow 11^2 - d^2 = 117 \Rightarrow 121 - 117 = d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 121 - 117 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = \pm 2\,.$$

Entonces, está claro que la solución buscada es 9, 11 y 13, independientemente de si d es positivo o negativo. Comprueba que eso es así.

7) Sea la progresión: 3, 12, 48, … a) Razona si es aritmética o geométrica. b) Halla el término general. c) Calcula el término noveno. d) Halla la suma de los nueve primeros términos.

Solución:

La diferencia entre los términos consecutivos no es constante, mientras que el cociente sí lo es. En concreto, $r = \frac{12}{3} = \frac{48}{12} = 4$. Así que la serie es geométrica.

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Introduzcamos los datos que nos dan:
$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = 3\cdot 4^{n-1}$. Este es el término general.

El término noveno es el que corresponde a n=9:
$a_n = 3\cdot 4^{n-1} \Rightarrow a_9 = 3\cdot 4^{9-1} \Rightarrow a_9 = 3\cdot 4^8 \Rightarrow a_9 = 196608$

La suma de los nueve primeros términos es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_9 = \frac{a_9 \cdot 4 - 3}{4-1} \Rightarrow S_9 = \frac{196608 \cdot 4 - 3}{4-1} \Rightarrow S_9 = \frac{196608 \cdot 4 - 3}{4-1} \Rightarrow S_9 = 262143$$

8) El 6º término de una progresión geométrica es 972 y la razón es 3. Halla el primer término.

Solución:

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Sustituyendo en esta expresión los datos dados obtenemos:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} \Rightarrow 972 = a_1 \cdot 3^5 \Rightarrow \frac{972}{3^5} = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{972}{3^5} = 4$$

9) Calcula la razón de la progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{2}{9}$ y el 6º término es 54.

Solución

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Sustituyendo en esta expresión los datos dados obtenemos:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} \Rightarrow 64 = \frac{2}{9} \cdot r^5 \Rightarrow \frac{54 \cdot 9}{2} = r^5 \Rightarrow r = 243^{\frac{1}{5}} = \left(3^5\right)^{\frac{1}{5}} = 3$$

10) En una progresión geométrica el primer término es 3 y la razón 4. con estos datos, calcula el término general y la suma de los 5 primeros términos

Solución

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Sustituyendo en esta expresión los datos dados obtenemos:

$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$. Este es el término general. El término quinto será:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 4^{5-1} \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 4^4 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot \Rightarrow a_5 = 768$$

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica está dada por: $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$. Sustituyamos datos:

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{768 \cdot 4 - 3}{4 - 1} \Rightarrow S_5 = 1023$$

11) Halla la suma de los infinitos términos de la progresión dada por $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ ...$

Solución:

La progresión es geométrica de razón $\frac{1}{3}$.

Como r es menos que 1 entonces la expresión de la suma toma la siguiente forma:

$$S_\infty = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \approx \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r} \qquad (1)$$

Sustituyendo los datos que nos dan en (1) obtenemos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{3-1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$$

12) Halla tres números en progresión geométrica cuya suma sea 26 y su producto 216.

Solución:

Esos tres números han de ser de la forma a, ar y ar^2.

La suma de estos tres números es 26, es decir:
$a + ar + ar^2 = 26$. (1)

Por otro lado, si su producto es 216 eso implica que $a\cdot ar\cdot ar^2 = 216$, o lo que es lo mismo:
$a^3\cdot r^2 = 216$. (2)

Tenemos un sistema de ecuaciones (1) y (2). De (2) despejamos r:

$$a^3\cdot r^2 = 216 \Rightarrow r = \left(\frac{216}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r = \left(\frac{6^3}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r = \frac{6}{a} \qquad (3)$$

Ahora llevamos (3) a (1):

$$a + ar + ar^2 = 26 \Rightarrow a + a\cdot\left(\frac{6}{a}\right) + a\left(\frac{6}{a}\right)^2 = 26 \Rightarrow a+6+\frac{36}{a} = 26 \Rightarrow a^2 + 6a + 36 = 26a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 20a + 36 = 0$$

Resolvamos esta ecuación de grado 2:

$$\Rightarrow a^2 - 20a + 36 = 0 \Rightarrow a = \frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2 - 4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1} = \frac{20\pm\sqrt{400-144}}{2\cdot 1} = \frac{20\pm\sqrt{256}}{2\cdot 1} =$$

$$=\frac{20\pm 16}{2\cdot 1}=\begin{cases} a_1=\dfrac{20+16}{2}=18 \\ a_2=\dfrac{20-16}{2}=2 \end{cases}$$

Si a_1 = 18 entonces, teniendo en cuenta (3), $r=\frac{1}{3}$.
En este caso, aplicando (1) obtenemos 18, 6 y 2.

Si a_1 = 2 entonces, teniendo en cuenta (3), $r=3$.

En este caso, aplicando (1) obtenemos 2, 6 y 18. Así que hemos obtenido lo mismo para los dos valores de a.