Uno no puede evitar la sensación de que esas ecuaciones matemáticas tienen una existencia independiente de la existencia propia, de que son más sabias que nosotros, más sabias aún que sus descubridores, de que podemos obtener de ellas más de lo que en ellas se puso.

Hertz, sobre las ecuaciones de Maxwel

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales está formado por ecuaciones de primer grado en todas las incógnitas. Esas ecuaciones han de verificarse a la vez.

Un sistema formado por dos ecuaciones y dos incógnitas, que es lo que vamos a estudiar principalmente, se escribe como sigue:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

a) Método de sustitución.
b) Método de igualación.
c) Método de reducción.
d) Método de Gauss.
e) Método de Cramer.
f) Método matricial.

a) Método de sustitución.

En una de las dos ecuaciones del sistema se despeja una incógnita y luego se sustituye esa expresión en la otra ecuación.

Ejemplo:

Resuelve: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$

Por conveniencia, despejamos *x* de la ecuación primera. Luego sustituimos ese valor en la otra ecuación y operamos.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 3x - y = -5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$3(2-y) - y = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 - 3y - y = -5 \Rightarrow -4y = -11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{11}{4}}$$

Ya hemos hallado *y*. Para conseguir *x* llevamos el valor de *y* a cualquiera de las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x = 2 - y \Rightarrow x = 2 - \dfrac{11}{4} \Rightarrow \boxed{x = -\dfrac{3}{4}} \\ 3x - y = -5 \end{cases}$$

La solución obtenida puede expresarse así:

$$(x, y) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right)$$

b) Método de igualación.

En cada una de las dos ecuaciones del sistema se despeja **la misma incógnita**, igualando luego ambas expresiones. De ahí se obtienen las soluciones buscadas.

Ejemplo:

Resuelve:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ x=\dfrac{-5+y}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2-y=\frac{-5+y}{3} \Rightarrow \frac{(2-y)3}{3}=\frac{-5+y}{3} \Rightarrow$$

$$6-3y=-5+y \Rightarrow -4y=-11 \Rightarrow \boxed{y=\frac{11}{4}}$$

Calculemos x:

$$y=\frac{11}{4} \Rightarrow x=2-\frac{11}{4} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{11}}$$

Conclusión:

$$(x,y)=\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$$

c) Método de reducción.

El método de reducción implica emplear algo de ingenio. Consiste en manipular de forma conveniente a las ecuaciones, multiplicándolas por números convenientes, con el fin de que al sumarlas se cancele alguna incógnita y obtener así la otra de una forma sencilla.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+5y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -10x-5y=-10 \\ 3x+5y=-5 \\ \hline -7x=-15 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{15}{7}}$$

Lo que hemos hecho ha sido multiplicar la ecuación superior por –5. De este modo al sumar ambas ecuaciones se pierde la y y la x se obtiene casi de forma inmediata.

$$2x+y=2 \Rightarrow 2\left(\frac{15}{7}\right)+y=2 \Rightarrow$$

$$y=2-\frac{30}{7} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{16}{7}}$$

Solución:

$$(x,y)=\left(\frac{15}{7},-\frac{16}{7}\right)$$

Los métodos que se detallan a continuación no están contemplados en los contenidos de la ESO, aunque sí en Bachillerato. Si quieres ir adelantando trabajo yo te doy la oportunidad.

d) Método de Gauss.

Este método es utilizado para resolver sistemas de tres ecuaciones y más. Es el método que suele representar más problemas al alumno, ya que es necesaria cierta dosis de ingenio. Vamos a analizar el caso en el que tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{13}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}y = b_3 \end{cases}$$

El juego consiste en eliminar incógnitas mediante la suma o resta de ecuaciones. Mediante manipulaciones convenientes vamos dando pasos para que el sistema anterior quede del siguiente modo:

$$\Rightarrow \begin{cases} a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}y = b'_1 \\ \qquad + a'_{22}y + a'_{23}y = b'_2 \Rightarrow \\ \qquad + a'_{32}y + a'_{33}y = b'_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a''_{11}x + a''_{12}y + a''_{13}y = b''_1 \\ \qquad + a''_{22}y + a''_{23}y = b''_2 \Rightarrow \\ \qquad\qquad + a''_{33}y = b''_3 \end{cases}$$

Los coeficientes a'_{ij} y a''_{ij} son los coeficientes que se obtienen al multiplicar la ecuación por un número y sumarla o restarla con otra ecuación del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3y = 11 \\ 5x + 4y - 2y = 7 \\ 3x - 2y + 5y = 6 \end{cases}$$

Queremos eliminar el 5x de la segunda ecuación. Para ello multiplicamos la 1ª ecuación por –5 y la sumamos a la 2ª ecuación después de haberla multiplicado por 6:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3y = 11 \\ 0x + 14y - 27y = -13 \\ 3x - 2y + 5y = 6 \end{cases}$$

Sumamos la 1ª ecuación con la 3ª multiplicada por –2:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3y = 11 \\ 0x + 14y - 27y = -13 \\ 0x + 6y - 7y = -1 \end{cases}$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por 3 y la sumamos a la 3º ecuación multiplicada por –7:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3z = 11 \\ 0x + 14y - 27z = -13 \\ 0x - 0y - 32z = -32 \end{cases}$$

Ya hemos hecho todo el trabajo. Ahora basta con ir recopilando los valores de las tres incógnitas.

De la 3ª ecuación:

$$-32z = -32 \Rightarrow \boxed{z = -1}$$

De la 2ª ecuación:

$$14y - 27(-1) = -13 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

De la 1ª ecuación:

$$6x+2\cdot 1+3(-1)=11 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Conclusión:

$$(x,y,z)=(1,1,1)$$

e) **Método de Cramer.**

Es un método fácil. La única pega a tu nivel es que necesitas conocer un poquito sobre unos números llamados *determinantes*. Pero si tienes espíritu explorador ello no va a ser un obstáculo para ti.

Un determinante es un conjunto de números dispuestos en filas y en columnas. El número de filas y columnas ha de ser el mismo. Ejemplos de determinantes:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \ldots$$

Estas disposiciones de filas y columnas representan cantidades numéricas.

Así, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 17 .$$

A este resultado se llega como sigue:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot 3-5\cdot(-1)=17 .$$

Otro ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3-1\cdot 2=13$$

Sencillo, ¿no? Decir que para un determinante de tres filas y tres columnas el procedimiento es un poco más complejo. Más adelante detallaré cómo se resuelve este tipo de determinantes.

Resolvamos dos sistemas ya tratados antes mediante otro métodos usando Cramer.

Resuelve $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$

Los coeficientes del sistema los escribimos del siguiente modo:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix}\right).$$

Ahora hallamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)-3\cdot 1=-4 .$$ Bien.

Fíjate como se deducen las incógnitas x e y.

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix}\right)$$

(a) (b) (c)

(c) (b)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\-5&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}}=\frac{-2+5}{-4}\Rightarrow\boxed{x=-\frac{3}{4}}$$

(a) (c)

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&2\\3&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}}=\frac{-5-6}{-4}\Rightarrow\boxed{y=\frac{11}{4}}$$

Solución:

$$(x,y)=\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$$

$\begin{cases}2x+y=2\\3x+5y=-5\end{cases}$. Los coeficientes del sistema los escribimos del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccc}\left(\begin{array}{cc|c}2&1&2\\3&5&-5\end{array}\right).\\ \text{(a)}\ \text{(b)}\ \text{(c)}\end{array}$$

Ahora hallamos el determinante $\begin{vmatrix}2&1\\3&5\end{vmatrix}$:

$\begin{vmatrix}2&1\\3&5\end{vmatrix}=2\cdot5-3\cdot1=7$. Bien. Fíjate como se deducen las incógnitas *x* e *y*.

(c) (b)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\-5&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\3&5\end{vmatrix}}=\frac{10+5}{7}\Rightarrow\boxed{x=\frac{15}{7}}$$

(a) (c)

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2&2\\3&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\3&5\end{vmatrix}}=\frac{-10-6}{7}\Rightarrow\boxed{x=-\frac{16}{7}}$$

Solución:

$$(x,y)=\left(\frac{15}{7},-\frac{16}{7}\right)$$

Enlaces sobre este método:

http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Cramer

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_2/Cramer_d3/introd.htm

f) Método matricial.

Este método requiere conocer unos entes matemáticos llamados *matrices*, íntimamente relacionados con los determinantes. Si estás interesado por el tema de forma particular te puedo iniciar a su estudio. El asunto no es muy complicado. Te avanzo un poco:

Resuelve $\begin{cases}x+y=2\\3x-y=-5\end{cases}$

El sistema lo reescribimos del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Despejamos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$, o lo que es lo mismo:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Casi está el sistema resuelto.

Para proseguir necesitas saber algunas cosas sobre matrices